

5. Energia

5.1. Energia ja energia jäävuse seadus

Energia (kr. k. *energos*: aktiivne) on füüsika keskne mõiste, mis ühendab kõiki füüsika valdkondi. Tänu Newtoni autoriteedile oli sellel väljapaistval positsioonil kaua aega jõud. Energia mõiste tõi teadusesse inglise füüsik **Thomas Young** juba 1807, aga tema tõeline võidukäik algas alles 19. saj. keskpaigas seoses termodünaamika arenemisega ja on jätkunud tänapäevani. Mehed, kes selles pöördes kõige väljapaistvamalt osalesid, olid: **Clausius, Joule, Kelvin, Boltzmann**. Mikromaailmas (kvantmehaanikas) räägitakse põhiliselt energiatest, mitte jõududest.

Mis on energia?

Kummaline küll, kuid vaatamata sõna igapäevasele kasutamisele ei tea me päris täpselt, mis asi see energia ikkagi on. Nii on see paraku paljude väga üldiste nähtustega, sh elu mõtte ja teadvuse olemuse määratlemisega. Parema puudumisel püütakse siis uuritava nähtuse olemisvorme võimalikult üksikasjalikult kirjeldada, lootuses et see aitab kaasa tema olemuse sügavamale mõistmisele.

Arusaamine energiast on aegade jooksul pidevalt muutunud. Newtoni mehaanika käsitleb energiat kui liikuvate masside omadust. 19. sajandil sai energiast ühenduslüli kolme tormiliselt areneva teadusharu – termodünaamika, keemia ja elektromagnetismi – vahel. Järgnev 20. sajand tõi kaasa veelgi põhjapanevamad avastused.

Kõigepealt sidus Einstein geniaalselt lihtsa erirelatiivsusteooria valemiga $E = mc^2$ energia (E) ja massi (m). c^2 tähendab siin ühikuid siduvat koefitsienti, sest massi ja energiat mõõdetakse erinevates ühikutes (c on valguse kiirust vaakumis). Tegemist on väga olulise nihkega füüsilise maailma olemusest arusaamises. Varem mõeldi, et mis ka ei juhtuks, protsessis osalejate energia ja eraldi nende mass jäävad samaks. Tegelikult ei saa üht teisest eristada ning **kehtib ühtne energia ja massi jäävuse seadus**. $1 \text{ kg} = 9 \cdot 10^{16} \text{ J}$; võrdle inimkonna aastase energiatarbega, mis on $\sim 10^{21} \text{ J}$. Energial on mass ja massiga on seotud energia. Niisiis, ei ole eraldi füüsikas õpetatavat

Energia mõõtühik on J (džaul). Üks džaul on ligilähedaselt ekvivalentne tööga, mida peab tegema 100 g õuna tõstmiseks maast 1 m kõrgusele.

Elektromagnetlainete, sh **valguse levimise kiirus** (vaakumis $c \approx 300000 \text{ km/s}$), on füüsikaliste mõjude levimise suurim kiirus.

Planck'i konstant ($h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$) seob füüsikalise objekti laine- ja korpuskulaarseid omadusi.

energia jäävuse seadust ja keemias õpetatavat massi jäävuse seadust. Need kaks seadust on eraldi võttes ligilähedaselt õiged vaid kas madalate energiatega (millele vastavat väikest massi on raske mõõta)

või suurte masside (millele vastav energia on hoomamiseks liiga suur) korral.

Seejärel lõhkus **Plancki** (Max Planck (1858–1947), saksa füüsik, Nobeli preemia 1918) samavõrd geniaalne kvantmehaanika valem $E = h\nu$ tavaarusaama energia pidevusest. Tuleb välja, et energia esineb vaid

portsjonite ehk kvantidena, mis on võrdeline energiavälja seisundeid iseloomustava sagedusega ν . Võrdelisustegurit h nimetatakse Plancki konstandiks. Seega on valgus energia olemise üks vorme. Valguse neeldumist aines saab järelkult mõõta samade riistadega, mida kasutatakse näiteks soojusenergia mõõtmiseks (bolomeeter, kalorimeeter, termomeeter, termopaar jne.). Kuivõrd energia ja mass on seotud, siis järeldub siit otsekohe, et ka valgus (st elektromagnetiline väli) omab massi.

Tänapäeval teab neid valemeid iga koolipoiss või on neist vähemalt midagi kuulnud. Esimene valem on aluseks meie ettekujutustele makrokosmosest koos kõigi planeetide, tähtede ja galaktikatega, teine aga mikrokosmosest, st molekulide, aatomite ja veel väiksemate osakeste maailmast.

Võtame siis lihtsalt teadmiseks, et energia olemasolu on üks materia põhiolemust. **Energia on materia liikumise ja vastastikmõju üldistatud kvantitatiivne mõõt.**

Energia ei teki ega kao, kuid võib muutuda ühest vormist teise.

See ongi **energia jäävuse seadus**. Energia jäävuse seadus on seotud niisuguste nimedega nagu **Julius Robert von Mayer** (1842), **Joul** (1843) ja **Ludwig Ferdinand von Helmholtz** (1847). Huvitav on vast teada, et Mayer oli arst, mitte füüsik, nagu need teised mehed.

Energia eksisteerib kõige erinevates vormides. Näiteks gravitatsiooni, soojuse, valguse, tuumaenergia jne kujul. See on nähtavasti ka energia mõiste raske hoomatavuse üks peamisi põhjusi. Tuleb märkida, et keemiline energia, mis eluslooduse (bioenegeetika) seisukohalt omab esmajärgulist tähtsust on laiemast perspektiivist lähtudes üsna marginaalne energialiik. Universumis tervikuna domineerib gravitatsioon. Iga mass, ka kõige pisem, evib gravitatsioonienergiat. Piisavalt suure massi korral aga ületab gravitatsioon kaugelt kõikide teiste energialiikide panuse.

Gravitatsioonienergia võib massi kokkutõmbel (kollapseerumisel) oma vormi muuta, muundudes näiteks valguseks või soojuseks. Vee langemist hüdroelektrijaama tammilt Maa keskmele veidi lähemal asuvate turbiini labadele võib muuseas käsitleda kui tammi kõrgusega reguleeritud gravitatsioonilist kokkutõmmet. Samas illustreerib langeva vee abil elektrienergia tootmine suurepärast ühe energiavormi (gravitatsiooni) teiseks (elektrienergiaks) muundumist. Olgu lisatud, et Päikese termotuumareaktsioone toidab samuti gravitatsioon.

Võib osutada, et universumi koguenergia on tegelikult 0! Kui see nii on, siis on see teatud kompensatsiooniefekti tulemus. Arvatakse, et kõik teadaolevad osakesed annavad energiasse positiivse panuse, mille siis kompenseerib nende gravitatsioonilise kokkutõmbe negatiivne energia. Veidi aja pärast me näitame, et gravitatsiooniline energia on tõesti negatiivne suurus.

Vaatamata energia avaldusvormide näilisele mitmekesisusele esineb (massi arvestamata) siiski ainult kahte liiki energiat :

- liikuva keha **kineetiline energia** (sõltub **kiirusest**)
- jõuväljas asuva keha **potentsiaalne energia** (sõltub **asukohast**)

Siin võib täheldada analoogiat hõõrdumis- ja deformatsioonijõuga, mis lähemal vaatlusel osutusid vaid elektromagnetiliste jõudude eriavalduseks.

Energia ei teki ega kao, vaid muundub ühest vormist teise tähendab, et looduses toimub pidevalt kineetilise energia muundumine potentsiaalseks ja vastupidi, potentsiaalse energia muundumine kineetiliseks. See väärmatu looduse põhiseadus ei ilmne igapäevaelus sugugi väga selgelt. Veerev pall kaotab oma kiirust ja peatub, keha kukub maha ja jääb sinnasamasse lamama jne. Energia justkui kaob kuhugi, näiliselt jäljetult. Nii see siiski ei ole. Lähem vaatlus näitab väärmatult, et toimus lihtsalt energia vormi muutus. Toodud näidetes muundus keha liikumise kineetiline ja asukoha potentsiaalne energia keha **siseenergiaks**. Aine molekulaar-kineetilise teooria järgi koosneb igasugune siseenergia aga samuti üksnes keha osakeste (aatomite ja molekulide) potentsiaalse ja kineetilise energia summast. Seega mingi uue energia vormiga siin tegemist ei ole. Me tuleme selle olulise küsimuse juurde hiljem veel korduvalt tagasi. Kineetilise (liikumisenergia) ja potentsiaalse (asukohast sõltuva ning deformatsioonienergia) energia summat nimetatakse keha **mehaaniliseks energiaks**. Näiteks lendav lennuk omab nii kineetilist kui ka potentsiaalset energiat.

Oluline üldistus

Kaasaegses füüsikas domineeriva väljateooria seisukohalt omavad väljad energiat ($E = h\nu$), impulssi ($p = \frac{h}{\lambda}$) ja pöördimpulssi (spini), mis on jäävad igasugustes protsessides. Vastastikmõju kehade vahel tähendab siis **lokaalset** (antud keha asukohas toimuvat) energia, impulsi ja/või pöördimpulsi ülekannet väljalt (mis on tekitatud teise keha poolt) antud kehale. Seega tuleb igasugust objekti energia muutust vaadelda kui energia ülekannet väljalt objektile, kusjuures kehtib seos

$$E(\text{aine}) + E(\text{vali}) = \text{const}$$

Liitosakese mass-energia koosneb

- koostisosade massidest
- nende liikumise kineetilisest energiast
- liitosakesi siduva välja potentsiaalsest energiast (ehk seoseenergiast).

Vesiniku aatomi mass on veidi väiksem ($\sim 10^{-6}$ osa võrra) kui prootoni ja elektroni seisumasside summa. Seepärast eraldubki prootoni ja neutroni liitumisel (aatomi tekkimisel) sellele massi puudujäägile võrdne energia (seoseenergia).

Deuteron (prootoni ja neutroni tuumajõuga kooshoitav süsteem) on $\sim 10^{-3}$ osa võrra kergem kui vabad prooton ja neutron. Deuteroni tekkimisel vabaneda võib energia on siis samuti vastavalt suurem.

Termotuumareaktsioonil ühinevad 4 H aatomit üheks He aatomiks ning vabaneb energia ($\sim 2.6 \cdot 10^{12}$ J/mol), mis vastab massile 0.029 g. See moodustab vaid $0.029/4=0.7\%$ nelja H aatomi seisumassist.

Analoogiliselt peab ka Päikesesüsteemi mass olema väiksem Päikese ja tema ümber tiirlevate planeetide ja teiste taevakehade seisumasside summast. See erinevus sisaldab gravitatsioonilist (potentsiaalset) seoseenergiat ja kehade liikumise kineetilist energiat.

5.2. Energia versus töö.

Töö on ühelt kehalt teisele energia ülekande viis. Mehaanikas ka ainuke viis, seepärast defineeritakse mehaanikas energiat kui töötegemise võimet. Termodünaamikas kohtame samuti teist energiasiidet viisi, milleks on soojus, kuid sellest edaspidi. Iga töö, mida tehakse kehade/väljade kallal suurendab nende energiat. Selle energia võime kunagi töö vormis hiljem jälle tagasi saada. Katseliselt on tõestatud, et ükski reaalselt toimuv energiamuundus pole täielik. Mingi osa energiast läheb ikka kasutult raisku, aga sellest jälle kunagi edaspidi.

Töö on seega lihtsalt sõna teise objekti või jõu poolt kehale antud energia tähistamiseks. Langeb üsna hästi kokku igapäeva mõistega: energiline inimene on see, kes on aktiivne ja suudab palju tööd teha.

Kui keha liigub jõu toimele teise kohta, siis öeldakse, et see kehale rakendatud jõud on teinud tööd. Tehtud töö hulka (ehk ülekantud energiat) arvutatakse jõu ja **selle jõu mõjumise suunas** läbitud teepikkuse korrutisena:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \alpha$$

kus α on mõjuva jõu ja keha liikumissuuna vaheline nurk.

Loomulikult mõõdetakse tööd samades ühikutes kui energiat. **Džaul on töö, mida teeb jõud üks njuuton ühe meetri pikkusel teel: [J] = [N]·[m].**

Intuitsioonile vastupidiselt **nihke suunas ristiolev jõukomponent töö ei tee (energiat üle ei kannab)**. Nii on see näiteks ühtlasel ringliikumisel, kus tsentrisuunaline jõud töö ei tee (ehkki ta muudab liikumise/impulsi suunda). Seepärast, kui ei ole teisi väliseid tegureid, mis liikumiselekt muudaksid, võib selline ringliikumine lõpmatult kaua kesta (selline olek on stabiilne).

Töö muutuv jõuväljas

Kui jõud on teepikkuse (koordinaadi) funktsioon (st muutub sõltuvalt asukohast), siis tuleb elementaartööd väikestel vahemikel kokku liita ehk üle kogu tee integreerida, et summaarselt tehtud tööd saada

$$A = \int_{s_{\text{algus}}}^{s_{\text{lopp}}} \cos \alpha(s) F(s) ds.$$

Jagades F ja s ristsuunalisteks komponentideks tuleb integreerida liikumise ja jõu kui vektorite komponente kolme koordinaadi suunas eraldi

$$A = \int_{\text{Algus}}^{\text{Lopp}} [F_x(x)dx + F_y(y)dy + F_z(z)dz]$$

Mäletame, et $F_x(x) = \vec{F} \cdot \vec{x}$ jne. on jõu projektsioon vastavale koordinaatteljele. Tüüpiline muutuva jõu poolt tehtud töö arvutus on seotud keha asukoha muutusega teise keha gravitatsiooni- või elektriväljas.

Liikuva keha kineetiline energia

Kasutades töö definitsiooni, saame kergesti tuletada valemi kineetilise energia jaoks. Kiirusega v liikuva keha (mille mass on m) kineetilise energia saamiseks tuleb rehkendada kui palju tööd tuleb teha, et keha kiirust suurendada paigalseisust kuni väärtuseni v . Tehtud töö salvestubki liikivas kehas kineetilise energiana.

$$A = E_k = Fs = mas$$

Nüüd peame teadma teepikkust s , mille lõpuks saavutatakse kiirus v .

Kasutades jõu F mõjul ühtlaselt kiireneva liikumise seoseid $s = \frac{at^2}{2}$ ja

$v = at$ saame $s = \frac{v^2}{2a}$ ja edasi asendades saame:

$$E_k = \frac{mav^2}{2a} = \frac{mv^2}{2}$$

Edasi võime teha asenduse $p=mv$ ja saame kineetilise energia avaldada üldisemal kujul liikumise hulga e impulsi kaudu:

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

Kineetiline energia kasvab proportsionaalselt kiiruse/impulsi ruuduga. Täpselt niisama palju energiat, kui kulus keha kiirendamiseks kiiruseni v saame tagasi, kui keha peatada.

(Gravitatsiooni)väljas asetseva keha potentsiaalne energia

Arutleme mis juhtub, kui pall otse üles visata. Käest lahtilaskmise hetkel on pallil üsna suur kiirus ehk kineetiline energia. Ülespoole liikudes kiirus pidevalt väheneb kuni pall peatub ja hakkab seejärel kiirust kogudes tagasi langema. Mis juhtus algse kineetilise energiaga ja kust see energia välja ilmus, kui me palli uuesti kinni püüame? Kineetiline energia muundub välja potentsiaalseks energiaks kui liikuvat keha peatab jõuväli (antud juhul siis Maa gravitatsiooniväli).

Samasugune pidev energia vormi muundumine kineetilise ja potentsiaalse energia vahel toimub aatomites. Kui elektronid on tuumast kaugel on peaaegu kogu energia potentsiaalse energia vormis ja vastupidi. Kõik keemilised reaktsioonid, ka bioenergeetika, põhinevad sellel potentsiaalne energia-kineetiline energia muundel.

Leiame väljas asetseva keha potentsiaalse energia kasutades töö rehkendamise valemit. Käsitleme lihtsuse mõttes gravitatsioonivälja maapinna lähedal ja arvutame kui palju tööd tuleb teha massi m tõstmiseks kõrgusele h ületades raskusjõu mõju

$$E_p = A = Fs = mgh$$

Energia jäävuse seaduse kohaselt on summaarne energia kogu aeg sama vaatamata sellele, et potentsiaalne ja kineetiline energia pidevalt muunduvad teineteiseks:

$$E = E_p + E_k = mgh + \frac{mv^2}{2} = const$$

Samuti jääb konstantseks näiteks pendli (üldistatult: harmooniliselt võnkuva keha või ostsillaatori) koguerenergia võnkudes maksimaalse potentsiaalse ja kineetilise energiaga seisundite vahel. Keskmistatuna üle võnkeperioodi on $\frac{1}{2}$ energiast kineetiline energia ja teine $\frac{1}{2}$ potentsiaalne energia vormis.

Seda teades saame elegantselt arvutada kõrguselt h kukkuvat keha kiirust, sest kukkumise lõpuks on keha kineetiline energia võrdne algse asendi potentsiaalse energiaga:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \text{ kust } v = \sqrt{2gh}$$

Algenergia (algkiiruse) kaudu võime samuti leida ülesvisatava kivi maksimaalkõrguse.

Energiast rääkides meid tavaliselt ei huvita mitte absoluutne energia, vaid see kui palju energia ühes või teises protsessis kulus. Meid huvitav energia **muutus**. Gravitatsiooniväli (nagu ka elektriväli) on nn **potentsiaalne väli**, kus keha potentsiaalse energia muutus sõltub ainult **keha alg- ja lõppasendist**, mitte aga vahepealse liikumise trajektooriga. Tehtud töö on sama, ükskõik millist rada mööda liigutakse samade alg- ja lõpp-punktide vahel. Mäe otsa tassitud kivi potentsiaalne energia ei sõltu sellest millist rada kivi üles tarimiseks kasutati.

Kas mäe otsast orgu lastud kivi lõppkiirus sõltub mäekülje kaldest, kui hõõrdumist võib mitte arvestada?

Sellest kõigest tulenevalt on ka potentsiaalse energia 0-punkti valik vaba ja valikut tehes toetutakse eelkõige mugavusele. Ülaltoodud potentsiaalse energia arvutuse näites oli nullpunktiks võetud Maa pind. Edaspidi näeme, et tihti on teistsugune võrdluspunkti valik otstarbekam.

Keha deformatsiooniga seotud potentsiaalne energia: Vedru

Igasugune keha ümberpaiknemisega ruumis tehtud mehaaniline töö, mida tehakse teise keha/jõu mõjul, salvestatakse potentsiaalse energia kujul. Asukohast sõltuvat potentsiaalset energiat omab seega iga vastastikmõjus olev **kehade süsteem**, sõltumata sellest kas ta liigub (st omab kineetilist energiat) või mitte.

Paneme nüüd hästi tähele! Kõikides protsessides, mille käigus toimuvad aine (sealhulgas aatomite ja molekulide) teatud struktuursed ümberkorraldused või deformatsioonid, salvestub/kulub potentsiaalset energiat: faasiüleminekud (näiteks vesi-jää, aurumine), valkude konformatsioonilised siirded, ensümaatilised reaktsioonid, toiduainete lagundamine seedetraktis jne. Pidev kineetilise ja potentsiaalse energia muundumine toimub ka lihastes. Näeme, et molekulaarsetele (sh bioloogilistele) protsessidele rakenduvad needsamad põhimõtted, kui nendele, mida me oleme harjunud tüüpilisteks mehaanilisteks protsessideks/süsteemideks pidama. Näiteks vedru.

Leiame keha deformatsiooniga seotud potentsiaalse energia, milleks tuleb arvutada **vedru kokkusurumisel** tehtud töö:

$$dA = -F(s)ds = ksds$$

$$A = \frac{1}{2}ks^2$$

Jõu jaoks kasutasime juba tuntud valemit $F(s) = -ks$ (k on siin elastsuskonstant). Kuivõrd jõud sõltub deformatsioonist, siis pidime kasutama integreerimist e juppide kaupa elementaartööde kokkuliitmist.

Kehade (sh aatomite ja molekulide) elastsel deformatsioonil akumuleeritakse potentsiaalne energia, **mis on proportsionaalne kokkusurumise/väljavenitamise (tasakaaluasendist nihke) amplituudi ruuduga**.

Ülesandeid lahendades arvutame näiteks kui kõrgele saab hüppata kirp, kelle kehas keskmine ATP kontsentratsioon on 0.1 mM? Seejuures eeldame, et ATP kogu keemiline energia muutub hüppel kineetiliseks energiaks.

5.3. Töö ja võimsus

Võimsus on füüsikaline suurus, mida mõõdetakse ajaühikus tehtud töö hulgaga (energia tootmise/akumuleerimise kiirusega).

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = F_s \frac{\Delta s}{\Delta t} = F_s v$$

Võimsust kasutatakse nt mootorite ja küttekehade hindamisel, teadmaks kui palju tööd need suudavad ajaühikus teha. Võimsuse ühik on Watt [W] = [J]/[s] (dzaul sekundis). Elektripirnide tarbitav võimsus on näiteks 40 – 100 W, elektripliit 600 – 2000 W, automootor 50 – 100 kW.

Elektrienergia hulga mõõtmiseks kasutatakse ühikut kilovatt-tund (kWh), see on töö, mida teeb võimsus 1 kW ühe tunni = 3600 s jooksul. Üks kWh = $1000 \text{ J s}^{-1} \times 3600 \text{ s} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3600 \text{ kJ}$.

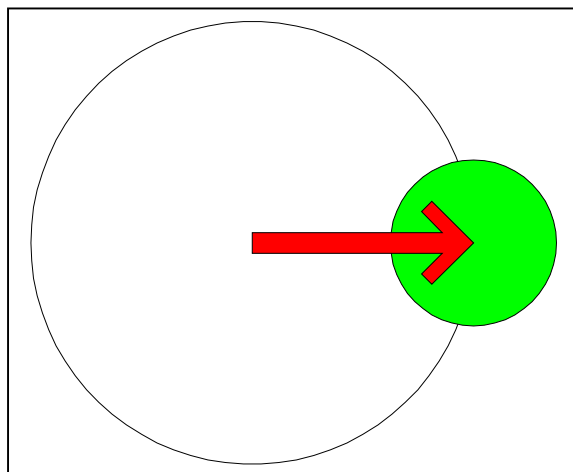
Summaarne energia tarbimise kiirus on üks inimeste heaolu taseme näitajaid. USA-s on see ~10 kW/inimene (Kaempffer lk. 132), arengumaades kuni 1000 korda väiksem.

Mis piirab inimese töövõimet? Energia kulutamise/tootmise kiirus (~100 W) kindlasti, aga ka maksimaalselt arendatav jõud. Viimane on määratud luusiku, kõõluste ja lihaste mehaaniliste omadustega. Muide, hobune on inimesest umbes 7 korda jõudsam (1 hj~736 W).

5.4. Potentsiaalne energia **tsentraalsümmeetrilises** jõuväljas

Teades süsteemi potentsiaalset energiat ja selle muutumist sõltuvalt erinevatest häiritustest saame olulist informatsiooni selle süsteemi kohta. Siia maani me oma arutlustes enamasti eeldasime, et ülesvisatud keha kõrgus muutub võrreldes Maa raadiusega sedavõrd vähe, et raskusjõudu saab lugeda konstantseks. Kui aga kaugus muutub suhteliselt palju, näiteks nagu kosmoselendudel või nagu elektroni kaugus aatomis muutub tuuma suhtes, siis ei saa ei gravitatsiooni- ega ka elektrivälja jõudu enam konstantseks lugeda vaid töö (energia) arvutamisel tuleb arvestada, et jõud muutub koos kauguse muutumisega. Kui see nii ei oleks, siis Maa külgetõmbe ületamiseks tuleks rakendada lõpmata suurt energiat (mgh) ja kosmoselennud oleksid võimatud. Õnneks ei vasta see tõele.

Taevakehade, nagu ka elektrilaengute poolt tekitatud väli, on piisavalt distantsilt vaadatuna **tsentraalsümmeetriline**. See tähendab, et nende



väljade tugevus sõltub vaid ühest koordinaadist, milleks on kaugus antud keha ümbritseva ettekujutatava kera keskpunktist ehk kera raadius, r .

Gravitatsiooniväli

Newtoni gravitatsiooniseadus väidab, et kahe keha vahel mõjub gravitatsiooniline tõmbejõud, mis on võrdeline kehade massiga (nende

korrutisega) ja pöördvõrdeline nendevahelise kauguse ruuduga:

$$F = ma_g = -k_g \frac{mM}{r^2}$$

Jõud (vektor!) on **negatiivne**, sest ta mõjub vahemaa kasvu suunalisele nihkevektorile vastupidises suunas. Elementaartöö, mida tuleb **kulutada** selleks, et **suurendada** kehade vahelist kaugust dr võrra oleks siis

$$dA = -Fdr = k_g \frac{mM}{r^2} dr$$

Paneme tähele kasutatud märkide konventsiooni! Töö on **negatiivne**, sest tööd tehakse mõjuva välja vastu (energiat antakse ära). Kui tahame arvutada kogu tehtud töö liikumisel mingil pikemal teelõigul, peame vastavad elementaartööd summeerima e võtma integraali piki läbitud tee. Üldjuhul saame siis

$$A = \int k_g \frac{mM}{r^2} dr = k_g mM \int \frac{dr}{r^2} = -k_g \frac{mM}{r} + A_0$$

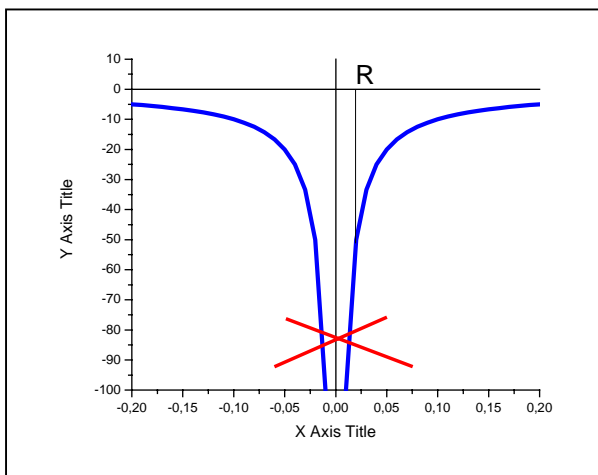
Väärrib veelkord ülekordamist, et töö on energia ülekande vorm. Tehtud töö võrra me suurendasime süsteemi potentsiaalset energiat. Kui kahe keha vaheline **jõud kahaneb** kauguse suurenedes **pöördvõrdeliselt kauguse ruuduga** (nii nagu gravitatsiooniseaduses), siis tehtud **töö/kulutatud energia kasvab** (pange tähele negatiivset märki!) **pöördvõrdeliselt kaugusega**.

Kui tee on täpselt teada/määratud, siis saame integraali välja arvutada radades liikumise algpunktist lõpp-punkti:

$$A = k_g mM \int_{r_a}^{r_l} \frac{dr}{r^2} = -k_g mM \left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{r_a} \right) = k_g mM \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_l} \right)$$

Varem me fikseerisime potentsiaalse energia 0-punkti Maa pinnal. See on mugav niikaua kui me tegeleme liikumistega maalähedases ruumis. Füüsikaliselt põhjendatum on 0-punkt valida aga nii, et potentsiaalne energia on 0 masside/laengute lahkuvimisel lõpmatusse. Põhjendus seisneb selles, et igasugused omavahelised jõud kaovad partnerite kaugenedes lõpmatusse. Lõpmatuses väiksematel kaugustel on **tõmbuvate** kehade potentsiaalne energia on siis **negatiivne**

$$A = k_g mM \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_l} \right) = -k_g mM \frac{1}{r_l}$$



On selge, et r_l ei saa olla väiksem mingist piirväärtusest R (tähistagu see joonisel nt Maa raadiust). Võib näidata, et maakera sees on kehale mõjuv jõud proportsionaalne keha kaugusega kera keskpunkti ja suunatud keskpunkti poole (analoogia nt pendliga). See tähendab, et potentsiaalne energia suureneb **proportsionaalselt** raadiuse ruuduga.

Jooniselt võib samuti näha, et **tõmbuvate** kehade vahelise kauguse suurendamiseks tuleb teha välist tööd (kui kehad lähenevad, siis nad annavad energiat ära e teevad ise tööd). Elades Maal asume me kõik siis Maa gravitatsioonilise tõmbega määratud potentsiaaliaugu põhjas. Et täielikult koordinaatide alguspunktis asuva Maa mõjuväljast lahkuda tuleb temast lõpmata kaugele eemalduda. Asudes Maa pinnal kaugusel R tema keskmest on selleks vajalik kineetiline energia võrdne $1/2E(R)$ (vt tagapool).

Mis juhtub õunaga, kui viskame ta kujuteldavasse, maakera keskpunkti läbivasse auku (õhutakistusest ja maakera pöörlemisest tingitud segavaid faktoreid võib mitte arvestada)?

Ainult väga uudishimulikele

$-\frac{1}{r}$ sõltuvuse asendamine sirgega argumendi väikeste muutuste korral (nt potentsiaalne energia maalähedases ruumis).

$$\Delta E_p = E_p(R+h) - E_p(R) = -k\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = k\frac{h}{R^2 + Rh}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{R^2}h = mgh$$

Üldistus Taylori rea abil: Suvalist funktsiooni saab väikestel argumendi väärtustel arendada ritta argumendi astmete järgi nii, et see sisaldab argumendi

esimest astet: $U(x) = ax + \frac{1}{2}kx^2 + bx^3 + cx^4 +$

Elektriväli

Teades **Coulombi seadusega** määratud laengute vahel mõjuvat jõudu (vt ptk lõpus toodud infokasti), saame analoogiliselt gravitatsioonivälja näitega arvutada laengu liikumisel elektriväljas väga lühikesel teepikkusel tehtud töö:

$$dA = -Fdr = -k_e \frac{e_1 e_2}{r^2} dr$$

Paneme tähele, et Coulombi seadusega määratud jõud on samamärgiliste (kas + või - märgiliste) laengute puhul **positiivne** (jõud mõjub nihkega samas suunas). Tõmbuvate, st erinimeliste laengute korral (nt negatiivse laenguga elektron positiivse laenguga tuuma elektriväljas) peame potentsiaali ühesugust kuju arvestades (vt infokasti peatüki lõpus) midugi saama töö jaoks täpselt samasuguse avaldise nagu gravitatsiooniväljas.

Jällegi, kuna jõud on tugevasti kaugusest sõltuv, siis tuleb kogutöö leidmiseks jälle rakendada elementaartööde summeerimist (integreerimist).

Laengu liikudes raadiuselt r_1 raadiusele r_2 teeme tööd:

$$A = -\int_{r_a}^{r_i} k_e \frac{e_1 e_2}{r^2} dr = -k_e e_1 e_2 \int_{r_a}^{r_i} \frac{dr}{r^2} = k_e e_1 e_2 \left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{r_a} \right).$$

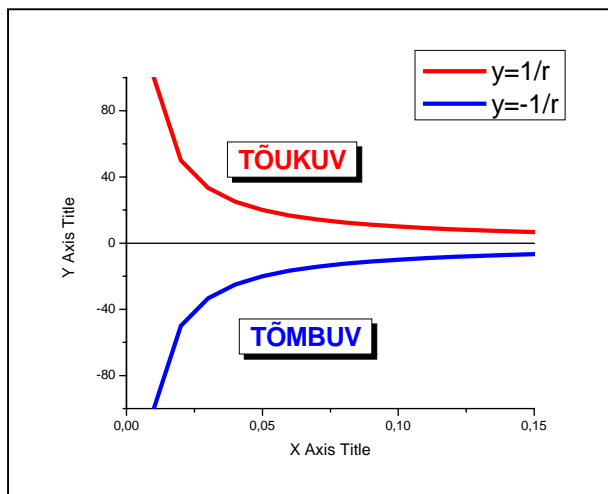
Kui alustame lõpmata kaugelt, s.t. $r_a = \infty$ (mis vastab elektroni potentsiaalsele energiale $E_p(\infty) = 0$), saame üldise valemi samanimeliste laengute potentsiaalse energia sõltuvuse jaoks tuuma ja elektroni vahelisest kaugusest:

$$E_p^e(r) = k_e \frac{e_1 e_2}{r}.$$

erinimeliste korral siis

$$E_p^e(r) = -k_e \frac{e_1 e_2}{r} \text{ (mott).}$$

Mida lähemal asub laeng tuumale, seda väiksem (negatiivsem) on tema potentsiaalne energia. Tõukuvate (sanimimeliste) laengute korral muutub potentsiaalne energia positiivseks.



Nagu me eespool nägime kehtivas samad järeldused ka gravitatsioonilise potentsiaalse energia kohta (va see, et gravitatsioon on alati tõmbab).

$$E_p^g(r) = -k_g \frac{mM}{r}$$

Me kõik oleme gravitatsioonipotentsiaali vangid asudes Maa peal vastava

gravitatsioonilise potentsiaaliaugu põhjas. Maa gravitatsiooni haardest väljasaamiseks tuleb vertikaalselt üleslennutatud raketile anda kineetiline energia, mis on võrdne gravitatsioonivälja potentsiaalse energiaga Maa pinnal

$$\text{ehk } \frac{mv^2}{2} = k_g \frac{mM}{r_{Maa}}.$$

See on nn. **II kosmilise kiiruse** tingimus (~11.2 km/s). II kosmilise kiiruse omamisel lahkeb raket Maa raskusvälja mõju alt planeetidevahelisse ruumi.

I kosmilise kiiruse puhul püsib raket kogu aeg Maa mõjuväljas. See tingimus saadi mäletatavasti ringliikumise tsentrisuunalise kiirenduse võrdsustamisel vaba langemise kiirendusega: $\frac{v^2}{r} \approx g$. Avaldades vasaku

poole kineetilise energia kaudu näeme, et $\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mgh$ e ringliikumise kineetiline energia võrdub $\frac{1}{2}$, mitte kogu, potentsiaalse energiaga! Hiljem näeme, et nii peabki see olema.

Konstant k nendes valemites määrab seose kasutatud ühikute süsteemiga. Kui laenguid mõõdetakse kulonites C, siis elektrostaatilise tõmbejõu saamiseks njuutonites omab elektriväljakonstant k_e väärtust $8.99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$. Kui masse mõõdetakse kilogrammides, siis gravitatsioonijõu saamiseks njuutonites omab gravitatsioonikonstant k_g väärtust $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$.

Selles, et need konstandid ei oma väärtust 1, väljendub füüsikalise mõõtühikute süsteemi ajalooliselt kujunenud ebajärjekindlus. Süsteemselt õige oleks olnud massiühikuks võtta niisugune mass, mis teist samasugust tõmbab ühe pikkusühiku kauguselt ühikulise jõuga. Seesama ühikuline jõud aga peab siis andma ühikulisele massile ka ühikulise kiirenduse. Et see aga nii tuleks, peaks nii massi, pikkuse kui ajaühikut vastavalt muutma. Praegused põhiühikud ei ole üldse seotud gravitatsiooniseadusega. Samasugune on lugu elektrilaengu ühikutega. Formaalselt peaks laenguühik Coulomb (kulon) olema defineeritud kui laeng mis tõmbab teist samasuurt vastasmärgilist laengut pikkusühiku kauguselt ühikulise jõuga. Tegelikult on aga Coulomb defineeritud hoopis magnetvälja kaudu: Coulomb on laeng, mis liikudes ühe sekundi jooksul läbi 1 m pikkuse traadi mõjutab teist samasugust traati, milles voolab niisama tugev vool, 1 m kauguselt jõuga 1 N. Antud definitsioon baseerub magnetväljal, mis tekib ruumis liikuvate laengute ümber ja on praktikas kergemini rakendatav. Elektrivälja jõud avaldub nüüd aga ülaltoodud kaliibrimiskonstandi kaudu.

Oluline!

Rõhutades gravitatsiooni- ja elektrivälja sarnasust ei tohi me ära unustada nende olulisi erisusi.

(i) **Gravitatsioonijõud on alati tõmbejõud, elektrilised jõud võivad olla nii tõmbe- kui tõukejõud.** See tuleneb elektrilaengutele omasest laengust, mida gravitatsioonilisel laengul e massil ei ole. Vastavalt puudub elektrostaatilise potentsiaali valemis miinusmärk. Vastasmärgilised laengud tõmbuvad ja nende jaoks on valem negatiivne, nii nagu peab.

(ii) Elektrilised jõud on ka väga tugevad ületades gravitatsioonijõude aktuaalses energia piirkonnas rohkem kui 40 suurusjärgu võrra. Et me seda tugevust väga ei tunneta tuleneb asjaolust, et aatomid, molekulid ja peaaegu kõik ained on elektriliselt neutraalsed. Aatomite ja molekulide vahelised vastastikmõjud on rohkem nagu kuloniliste jõudude jääkprodukt. SI ühikutes on elektroni laeng vaid $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, kuid sellest piisab et maailm eksisteeriks sellisena nagu ta on. Enamik jõududest, millega me igapäevases elus kokku puutume on elektromagnetilist päritolu: vedrud, õhu rõhk, musklijõud, magnet- ja elektrilised jõud.

Viimane märkus gravitatsiooni- ja elektrivälja analoogiast. Maalähedase gravitatsiooni analoogia on laeng kondensaatori plaatide vahel: $E = Fxh = mgh$; $U = FxI = eEI$.

5.5. Jõudude tasakaal ja energia ringjoonelisel liikumisel

Me juba teame, et looduses asuvad kõik kehad üksteise jõuväljades, suuremad kehad gravitatsiooniväljas, väikeste kehade puhul on oluline elektriväli. Ometi ei kuku tõmbuvad kehad üksteise peale, sest sellisel juhul oleks kogu universum ammu kokku kukkunud.

Makrokosmost stabiliseerib see, et kehad tiirlevad üksteise ümber vaba langemise tingimustes. Taevakehade tiirlemist põhjustav ja neid kinnihoidev nähtamatu "kõis" on gravitatsioon.

Keha M poolt kehale m avaldatav gravitatsioonijõud on mäletatavasti

$F_g = ma_g = k_g \frac{mM}{r^2}$. Teisalt on ringliikumise alati seotud tsentrisse

suunatud kesktõmbejõud $F_n = \frac{mv^2}{r}$. Tuletame meelde, et **liikumisega risti**

toimiv jõud töö ei tee. Püsiva orbiidi korral on kesktõmbejõud ja gravitatsioonijõud võrdsed, mis määrabki **tasakaalutingimuse**

$$\frac{mv^2}{r} = k_g \frac{mM}{r^2}.$$

Jagades mõlemad pooled m -ga läbi saame tingimuse vastavate kiirenduste jaoks (kesktõmbekiirendus=gravitatsiooniline kiirendus):

$$\frac{v^2}{r} = k_g \frac{M}{r^2}$$

Maalähedasel orbiidil $k_g \frac{M}{r^2} = g$ ja seega $\frac{v^2}{r} \approx g$. Teades g , M ja r

väärtusi saame valemist $k_g \frac{M}{r^2} = g$ hinnata ülemaailmse gravitatsioonikonstandi väärtuse, kui me peaksime selle ära olema unustanud.

Modifitseerime veelkord oma valemeid asendades kiiruse ringjoone pikkuse ja ühe tiiru tegemiseks kuluva aja kaudu:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r} \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 = m \frac{4\pi^2}{T^2} r = k_g \frac{mM}{r^2}$$

$$4\pi^2 r^3 = k_g M T^2$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{k_g M}{4\pi^2} = \text{const}$$

Selle seaduspärasuse leidis Kepler analüüsides Ticho Brache planeetide liikumise vaatlustulemusi ning tuletas oma gravitatsiooniseaduse alusel Newton. Valemi kehtib kehade (pole tähtis kas taevakehade või tehiskehade, nt sputnik) liikumisel nii ringjoonelisel kui ka elliptilisel orbiidil ja

teda saab kasutada nt tundmatu keha tiirlemisraadiuse arvutamiseks tema tiirlemisperioodi järgi.

Ringliikumise energia

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{4\pi^2}{T^2}r^2 = \frac{1}{2}kr^2$$

Näeme, et kõik liikumisega seotud suurused on parempoolsest avaldisest sootuks kadunud. Pöörliikumise kineetiline energia on võtnud potentsiaalse energia vormi, mis sõltub pöörleva keha asukohast pöörlemisentra suhtes. Hea näide energia ühtselt loomusest!