3. LIIKUMINE

Füüsika osa nimega **mehaanika** on teadus mis käsitleb **kehade liikumist ja tasakaalu** **jõudude mõjul**. Liikumine on looduse põhiomadusi. Seisvaid asju pole olemas. Paigalseis on alati suhteline (liikumatus millegi/kellegi suhtes).

Klassikaline mehaanika **põhilähendused**:

- Vaatleb **valguse kiirusest väiksema kiiruseg**a liikuvaid kehi
- Kehad on **makroskoopilised**, nende sisestruktuuri ei käsitleta

NB! Meie ettekujutus ümbritsevast maailmast toetub mudelitele. Klassikaline mehaanika käsitleb selliseid **mudelobjekte** nagu:

- materiaalne (st massiga) punkt
- absoluutselt kõva keha e tahkis
- absoluutselt elastne keha
- mittekokkusurutavad vedelikud
- ideaalgaas
- gravitatsioonikiirenduse muutumatus maalähedases ruumis
- Maa kui inertsiaalsüsteem
- jne

Ükski nendest mudelitest pole päris täpne ja ei vasta kõigis detailides tegelikkusele. Võrdle nt telliskivi ja hanesule langemist, või tennisepalli ja sulgpalli lendu. Ülelihtsustamise oht, mida bioloogias väljendas **reduktsionism** (komplekse süsteemi taandamine tema koostisosade mehaaniliseks summaks).

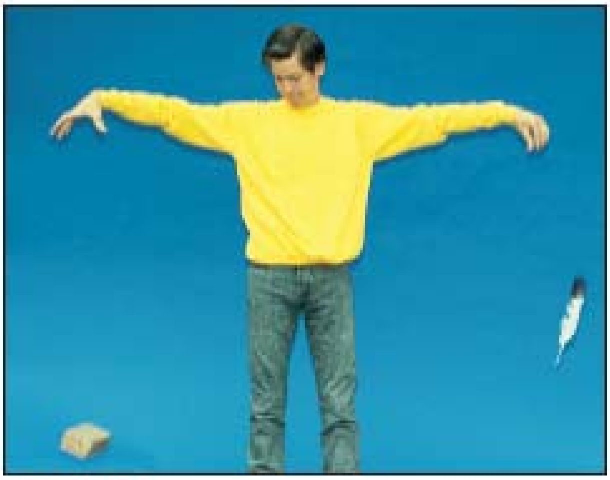


figure 3.5 The brick reaches the floor first when a brick and a feather are dropped at the same time.

W. T. Griffith. *The Physics of Everyday Phenomena. A Conceptual Introduction to Physics*. Mc Graw Hill 2004

Liikumist vaatleme kahes osas, **kinemaatika** ja **dünaamika**.

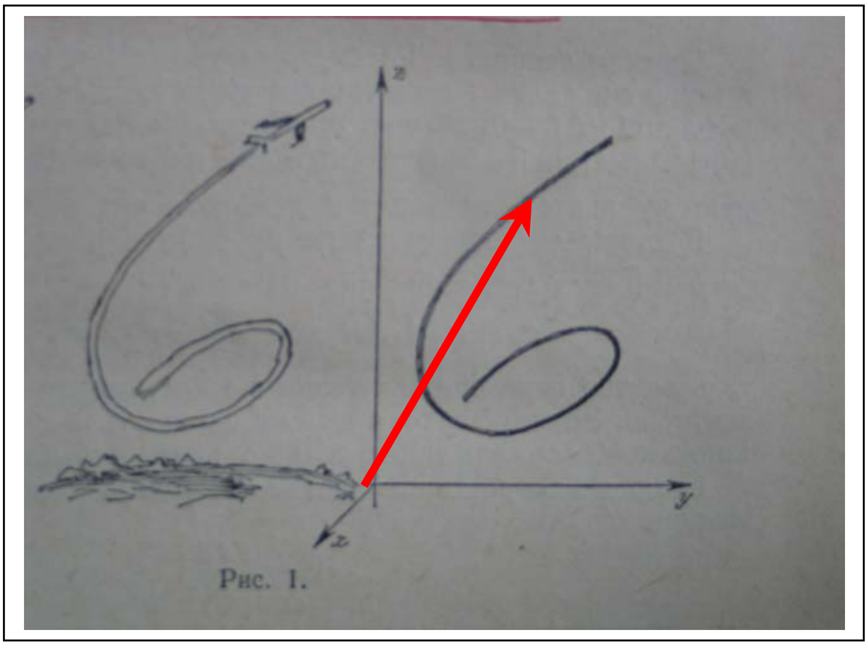
Kinemaatika käsitleb liikumist ja liikumisoleku muutusi ilma nende muutuste põhjusi lahkamata. **Dünaamika** käsitleb liikumist põhjuslikus seoses liikumist esilekutsuvate jõududega.

Alustame kinemaatikast ja defineerime liikumist kirjeldavad suurused ehk parameetrid, milleks on:

- **asukoht** (e koordinaadid)
- liikumise **kiirus**
- liikumise **kiirendus**.

3.1. Asukoht, koordinaadid, aeg

Füüsika on eelkõige katseline teadus. Seepärast küsime alati **kus** (asukoht), **millal** (aeg) ja **mis/kuidas** (funktsionaalne sõltuvus) **midagi** (nt autoõnnetus Jõhvis) toimus. Füüsikalise nähtuse kirjeldamiseks peame seega teda saama jälgida nii **ruumis** kui ka **ajas**. Nii saame füüsikaliste sündmuste jada. Klassikalises füüsikas saab mõõtmisi sooritada põhimõtteliselt lõpmatu täpsusega, kvantfüüsikas aga mitte. Üldjuhul seavad saavutatavale täpsusele, nagu me sissejuhatavas loengus juba rõhutasime, piirid määramatuse relatsioonid.



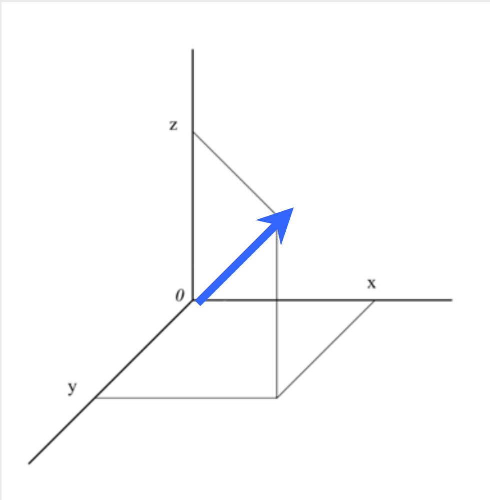
Keha asendi ja selle muutuste/nihke (teiste sõnadega, liikumise) kvantitatiivseks kirjeldamiseks kasutatakse ruumikoordinaate. **Koordinaadid** on **arvud**, mis määravad keha kauguse mingitest kindlaksmääratud kohtadest - koordinaat-telgedest. Kolmemõõtmelises ruumis (ainuke inimese poolt tunnetatav) on asendi määramiseks vaja kolme arvu (koordinaati), kahemõõtmelises (tasapinnal) kaks ja ühemõõtmelises (joonel) üksainus arv. Need koordinaadid koos koordinaattelgede alguspunktiga moodustavad asukoha **raadiusvektori** (sirge, mis algab 0 ja lõpeb antud punktis).

Põhimõtteliselt (teoreetiliselt) võib ette kujutada ka enama kui kolmemõõtmelisi ruume, näiteks võttes neljanda mõõtmena kasutusele aja. Nii on tehtud relatiivsusteoorias, kus toodi sisse neljamõõtmelise aeg-ruumi mõiste. Vajadusel võib koordinaatide arvu veelgi suurendada. Selliselt toimitakse nt kvantmehaanikas ja statistilises füüsikas, kus opereeritakse ruumidega, millel on N_A arv koordinaate, kus N_A~10^{24} on Avogadro arv.

Tähtis on seejuures vaid, et juurdetoodavad muutujad ei oleks mingite seoste kaudu olemasolevatest tuletatavad, vaid oleksid täiesti **sõltumatud** e **ortogonaalsed.** Ortogonaalsuse väljenduseks on, et vastavate suunavektorite skalaarkorrutis $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\alpha$ =0. Matemaatika osast teame, et see on ristiolevate vektorite tunnus. Seega ortogonaalsed teljed oleksid nagu kõik üksteisega risti, kuigi neid võib olla rohkem kui kolm.

Füüsikaline ruum on kuni kolmemõõtmeline, matemaatiline ruum pole piiratud. Keegi ei tea, miks see nii on. **Hawking** küll väidab, et väiksemaarvuliste dimensioonide korral poleks nii keerulised süsteemid nagu elu mõeldavad, suuremaarvuliste korral aga suureneks kahe keha vaheline gravitatsioonijõud kehade lähenemisel kiiremine, kui praegu ja planeetidel poleks siis stabiilseid orbiite ümber Päikese.

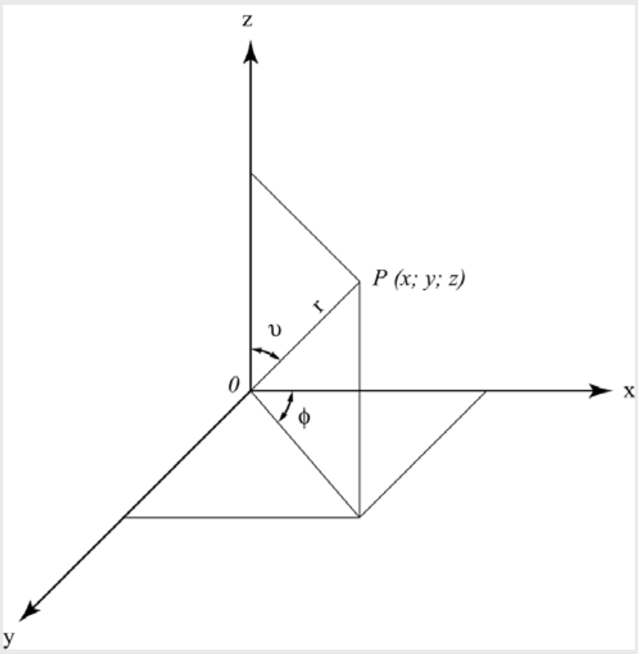
Kõige sagedamini kasutatav koordinaat-teljestik, nagu me matemaatika osast juba teame, on ristiolevate telgedega nn **ristkoordinaadid** e Cartesiuse koordinaadid. Selles teljestikus määratakse keha asukoht kolme kauguse kaudu: alustades liikumist koordinaatide lõikepunktist, esiteks liikudes piki x-telge, siis ristisuunas piki y-telge ja lõpuks ristisuunas piki z-telge. Kaugused x, y ja z kokkuleppelisest nullpunktist (telgede lõikepunktist) ongi keha riskoordinaadid.



Cartesiuse e. ristkoordinaadistik.

Ristkoordinaadistikku kasutatakse näiteks USA-s linnade planeerimisel, kus ‘streetid’ ja ‘avenue’d on üksteisega risti ja nummerdatud kasvavas järjekorras alates linna keskpunktist. Positiivsete ja negatiivsete väärtuste asemel kasutatakse ‘North’, ‘South’, East’ ja ‘West’ lisandeid.

Cartesiuse koordinaadid ei ole ainuke viis keha asukoha määramiseks, vaid seda saab teha ka mõne teistsuguse kolme arvu kombinatsiooni abil, peaasi, et kolm liikumist, mida need arvud kirjeldavad, oleksid ikka üksteisest sõltumatud. Näiteks tsentraalsümmeetriliste (kerakujuliste nagu aatomid) liikumiste kirjeldamiseks on mugavamad nn **polaarkoordinaadid**. Polaarkoordinaate on samuti kolm, kuid ainult üks neist (raadius *r*) omab pikkuse (kauguse) dimensiooni, kaks ülejäänut on nurgad, mis määravad selle liikumise suuna, mida mööda minnes määratud punkti jõutakse. Esimene on nurk ϑ. (teeta), mis määrab erinevuse vertikaalsihist ja teine on nurk φ, mis määrab erinevuse kokkuleppelisest horisontaalsihist x.



Polaarkoordinaadistik.

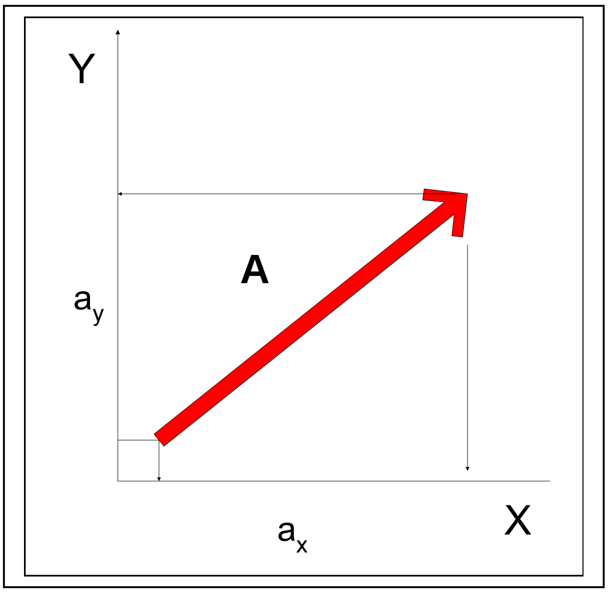
Polaarkoordinaate kasutatakse geograafias, kus ‘põhjalaius’ on sisuliselt 90°-ϑ ja idapikkus on φ. Kuna määratavad punktid asuvad kõik Maa pinnal, siis raadius oleks kõigi jaoks umbes 6400 km ja see jäetakse kirjutamata. Maapinna kohal õhus või maa sees olevate punktide koordinaatidele tuleks aga raadiuse väärtus juurde lisada. Polaarkoordinaate kasutame edaspidi näiteks **elektroni orbitaalide kvantmehaaniliseks kirjeldamiseks vesiniku aatomis**.

Üleminek ristkoordinaadistikust sfäärilisse koordinaadistikku (Kneubühl lk 15):

$$x = r\sin\vartheta\cos\phi$$
$$y = r\sin\vartheta\sin\phi$$
$$z = r\cos\vartheta$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\cos\vartheta = z/r$$
$$tg\phi = y/z$$

Teepikkus s (ehk **nihkevektor**) on kahe punkti asukohta tähistava vektori vahe (**r**$_2$-**r**$_1$).

Kahemõõtmelisel (tasapinnalisel) juhul on koordinaattelgede alguspunktist lähtuva nihkevektori kaks teljesuunalist komponenti avaldatavad järgmiselt



$$s_x = s\cos\alpha$$
$$s_y = s\sin\alpha$$

ja nihkevektori pikkus kui

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}\ .$$

Üldjuhul, kui nihkevektor algab suvalisest punktist tasapinnal, mida tähistab suunavektori r$_1$ lõpppunkt avaldub nihkevektor järgmiselt:

$$s = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Kolmemõõtmelises ristkoordinaadistikus avaldub teepikkus alg ja lõpp-punkti koordinaatide kaudu järgmiselt

$$\Delta s = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ruumi ja aja asümmeetria

Ruumikoordinaatidel ei ole eelissuunda. Kaks eri ruumi punktis asuvat vaatlejat (näiteks õppejõud ja tudengid) võivad samaaegse sündmuse kohta rahumeeli väita, et see toimus neist paremal/vasakul.

Erinevalt ruumist on reaalse maailma **aeg** ühemõõtmeline ja **ühesuunaline** (minevikust tulevikku). Jälle me ei tea täpselt, miks see nii on. Kosmoloogias arutatakse intensiivselt kas ajal on algus ja/või lõpp. Tavaliselt põhjendatakse aja suunda termodünaamika/statistilise füüsika teise (entroopia/korrastamatuse) seadusega. Kuid mitte kõik füüsikud ei jaga neid seisukohti. Neid häirib, et elementaarsed mehaanika (nt Newtoni) ja elektromagnetismi (Maxwelli) võrandid on aja suuna suhtes täiesti sümmeetrilised/pööratavad.

Aja kulgemise suunaga on seotud **põhjuslikkuse printsiip**: tagajärg järgneb põhjusele, mitte vastupidi.

Pikkuse (teepikkuse) ühikuks on **meeter**, m. Meeter on ligilähedaselt 1/40000000 Maa ümbermõõtu, kuid täpne ühik on kokkuleppeline ja oli pikemat aega defineeritud kui kahe peene kriipsu vahe plaatina-iriidiumi sulamist siinil, mida hoiti Pariisi lähedal, nüüd aga on meeter seotud teatud aine aatomite poolt kiiratava valguse lainepikkusega. **Meeter on üks kolmest mehaanika põhiühikust (m, s, kg) ja teda ei saa tuletada teiste ühikute kaudu.**

Aja ühikuks on **sekund,** s. Aja mõõduks võib olla suvaline piisavalt püsiv perioodiline (korduv) protsess. Ajalooliselt 1/31.5 miljondik aastast. Praegu kindel arv tseesiumi teatud kvantüleminekule vastava valguse võnkeperioode (suhteline täpsus 10^{-13}). Lähtudes südame löögisagedusest on sekund inimese jaoks loomulik ajaühik. **Sekund on üks kolmest mehaanika põhiühikust ja teda ei saa tuletada teiste ühikute kaudu.** Näiteks kiiruse ühik on m/s ehk m s^{-1} ja see on juba tuletatud põhiühikutest. Suurem osa **tuletatud ühikuid** on seotud põhiühikutega andes viimastele väärtuse 1.

3.2. Liikumise trajektoor ja kiirus

Lihtsaim füüsikaline nähtus on **ühe** keha liikumine. Ühe keha puhul ei saa rääkida vastastikmõjudest. Seega on see puhas, ilma mõjutusteta (füüsikud ütlevad **isoleeritud** keha) liikumine.

Kuidas me saame aru, et midagi liigub või ei liigu? Selleks me peame keha jälgima mõne aja jooksul. **Liikumine** on keha asukoha (koordinaatide) muutumine ajas. Erinevatel ajahetkedel saadud asukoha üleskirjutus on keha **trajektoor.** Trajektoor koosneb diskreetsetest punktidest. Trajektoori matemaatilisel üldistusel saame pideva **liikumisvõrrandi** näiteks kujul s=s(t).

Lihtsaim liikumisvorm on **ühtlane sirgjooneline** liikumine: Sel juhul on **konstantsed** nii **kiiruse absoluutväärtus** kui ka **suund**. Liikumise erijuht on paigalseis: liikumine 0-se kiirusega. Need ongi ainukesed liikumised, milles üks/isoleeritud keha saab osaleda. Kõverjoonelisel liikumisel muutumatu puutujasuunalise kiirusega (näit piki ringjoont) muutub kiiruse suund ja see on juba kiirendusega liikumine. Et kiirust muuta tuleb rakendada välist jõudu, mida ühe keha puhul pole kusagilt võtta.

Probleemid

(i) Absoluutselt isoleeritud kehasid ei ole olemas. Kui keha ei interakteeru mitte millegagi, siis me ei tea isegi seda, kas ta olemas on.

Swartz, Goldfarb (lk 36) toovad näite oma Shveitsi kellast, kus võivad elada väikesed mehikesed, kes justkui kella rattaid ringi ajavad. Niipea kui kella kaan aga lahti tehakse muutuvad nad vedrudeks ja ratasteks. Kas mehikesed on ka tegelikkuses olemas?

Õhu segavat mõju saab vähendada kasutades vaakumi, soojuse eest kaitseb termoisolatsioon, elektri ja magnetväljade eest rauast ekraanid, aga näiteks raskusjõudu ei saa kuidagi ekraneerida.

Seepärast uuritakse ühe keha liikumisi horisontaalsel peegelpinnal (hõõrdetakistuse vähendamiseks) või vaba langemise tingimustes (Galilei, 1564-1642).

Laboratooriumis saab uurida vabalt langeva keha *horisontaalset* liikumist. Näiteks laualt kukkuv kuulike (vt foto; mis on tehtud võrdsete ajavahemike tagant sähvivas (stroboskoopilises) valguses nagu diskol). Muide, ka näivalt pidev tavavalgus koosneb üksikutest kvantidest ja on seega diskreetne valgussähvakute jada! Kohane on samuti võrdlus kino ja televisooniga.

Need uurimused näitavad, üheselt et

- liikumised eri koordinaatide suundades on sõltumatud
- horisontaalisuunaline kiiruse komponent ei muutu ajas (horisontaalkiirus laualt lahkumise hetkel ja kuuli põrkel maaga on võrdsed).

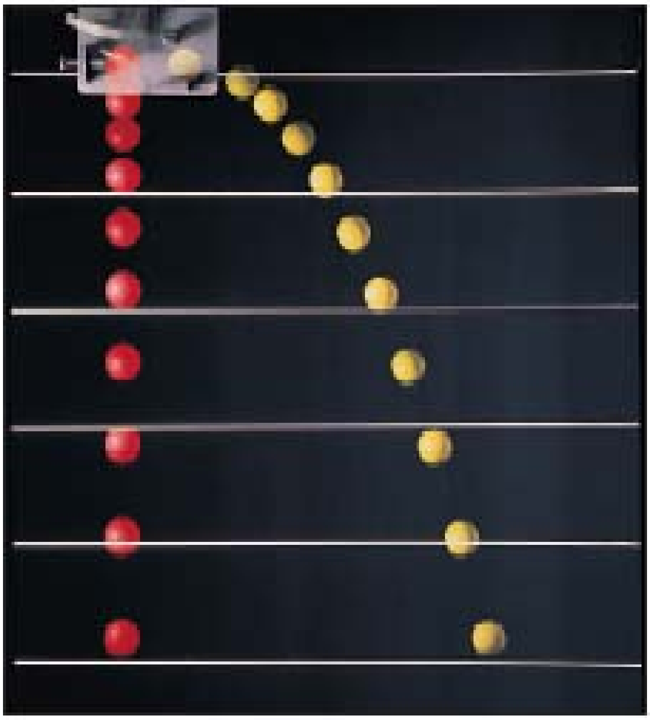


figure 3.16 A ball is dropped at the same time that a second ball is projected horizontally from the same height. Which ball reaches the floor first?

W. T. Griffith. *The Physics of Everyday Phenomena. A Conceptual Introduction to Physics*. Mc Graw Hill 2004

Viimase asjaolu üldistuseks on, et **kui objektile ei mõju jõud, siis tema liikumisolek ei muutu,** st ta kas seisab paigal või jätkab liikumist endise kiirusega (tuntud kui **Galilei inertsiseadus,** mille hiljem lisas muutumatul kujul oma teooriatesse Newton (**Newtoni I seadus**)). Lahendas vanade Kreeklaste probleemi: miks nool lendab ka peale vibunöörilt lahkumist. **Aristoteles** nt arvas, et õhu molekulid keerdudes ümber noole saba lükkavad teda tagant. Selle seisukoha ekslikkust on lihtne kontrollida: nool lendab ka õhust tühjakspumbatud tunnelis.

(ii) Paigalseis ja liikumise kiirus on suhtelised mõisted ja sõltuvad vaatleja liikumisest. Kui liikumine on kiirenev, siis näib meile, et enne paigalseisvale kehale mõjub jõud, sest tema kiirus ajas muutub. Kui keha kiirus vaatleja suhtes ei muutu, siis selle vaatleja seisukohalt (isegi kui ta ise liigub kiirendusega, näiteks vabalt langevas liftis) ei mõju kehale mingit täiendavat jõudu.

Matemaatiliselt õnnestub liikumist kirjeldada tänu selliste mõistete nagu **kiirus** ja **kiirendus** sissetoomisele. Viimane mõiste, nagu me juba rõhutasime, ühe keha puhul tähendust ei oma.

Kiirus (v) on füüsikaline suurus, mida mõõdetakse ajaühikus läbitud teepikkusega.

Kiiruse hetkväärtust arvutatakse kui

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \text{ kust } ds = v dt \qquad \text{ja } dt = \frac{ds}{v}$$

Viimased valemid seovad omavahel kiiruse, teepikkuse ja aja. Liikumise hetkekiirus iseloomustab trajektoori (läbitud teepikkuse) muutumise kiirust. Kiirus võib olla nii positiivne (vahemaa algpunktiga võrreldes kasvab) kui ka negatiivne (kahaneb). Konstantse kiiruse puhul läbitakse ajaühikus võrdseid vahemaid. Mittekonstantse kiirusega liikumine (ajaühikus läbitakse erinevaid vahemikke) on kiirendusega liikumine.

Kiirus nagu ka teepikkus on vektor, millel on x, y, ja z- suunalised komponendid. Telgedesuunalised kiiruse komponendid ($v_x=ds_x/dt$ jne.) on üksteisest sõltumatud.

Looduses eksisteerib **maksimaalselt võimalik kiirus**, valguse kiirus (vaakumis) *c*, millega üks objekt võib teiste suhtes liikuda. See on eksperimentaalne fakt, millele pole siiani head seletust. Sellel pole midagi pistmist nn. jänkuga, mis on puhtalt geomeetriline efekt ja pole kasutatav energia või massi edasikandmiseks *c*-st suurema kiirusega. Kaugmõjul on lõplik kiirus. Valguse kiiruse määras esmakordselt Taani astronoom **Ole Romer** (1676) ja juba täpsemalt prantslane **Armand Fizeau** (1848).

3.3. Ebaühtlase liikumise kiirendus

Liikumise kiirendus (a) on füüsikaline suurus, mida mõõdetakse kiiruse muutusega ajaühikus. Sirgjoonelise liikumise kiirendus on kiiruse muutumise kiirus, seega teine tuletis teepikkuse muutumisest:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Ka kiirendus on vektor, st, valem kehtib sõltumatute koordinaatide s_x, s_y ja s_z suhtes eraldi. Kiirenduse ühik on m s^{-1} s^{-1} = m s^{-2} (loe: meeter sekundis sekundis).

Kiirendusega liikumise kiirus muutub ajas pidevalt:

$$v(t) = v_0 + at$$

kus alghetkel kiirus ei olnud mitte null vaid v_0. NB! Valem kehtib vaid mitterelativistlikel kiirustel.

Eelmisel loengul nägime, et liikumisel läbitud teepikkuse leidmiseks tuleb lahendada esimest järku diferentsiaalvõrrand $ds = v(t)dt$, kus $v(t)$ on hetkkiirus. Diferentsiaalvõrrandi lahendamine on selle võrrandi integreerimine. Otsitakse funktsiooni, mille tuletis on $v(t)$.

Kiirendusega liikumisel läbitud teepikkus, kui aega hakkame lugema nullist (integraali alumine rada on null ja arvutada tuleb ainult funktsiooni väärtus ülemise raja korral):

$$s = \int (v_0 + at)dt = v_0 t + \int atdt = v_0 t + a\int tdt = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Teepikkuse *s* läbimiseks kuluva aja leiame ruutvõrrandit $at^2 + 2v_0 t - 2s = 0$. Lihtsustame jagades a-ga läbi $t^2 + \frac{2v_0}{a}t - \frac{2s}{a} = 0$ ja lahendades saame:

$$t = -\frac{v_0}{a} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{2s}{a}}$$

Tasub meelde jätta. Ruutvõrrandi lahend:

$$x^2 + bx + c = 0 \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lihtsamad mõelda on juhud, kus algkiirus on null, siis

$$s = \frac{at^2}{2},$$

kust leiame aja, mis kulub teepikkuse *s* läbimiseks:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

ja kiiruse *v*, mis saavutatakse teepikkuse *s* läbimisel

$$v = at = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2as}$$

Ülesandeid seoses raskuskiirendusega

Maa raskuskiirendust g loetakse Maalähedases ruumis konstantseks ja võrdseks g=9.81 m s^{-2}**.** Kuna elame Maal, siis enamik igapäevaelu probleeme on seotud selle raskuskiirendusega. Kõikide vabalt langevate kehade kiirus kasvab proportsionaalselt selle kiirendusega:

$$v=v_0+gt.$$

NB! Anname endale selgelt aru, et konstantne raskuskiirendus on järjekordne **füüsikaline lähendus**, mida saab kasutada vaid niikaua, kui väga suurt täpsust vaja ei ole. Tegelikult muutub raskuskiirendus pidevalt ja pöördvõrdeliselt kauguse ruuduga: $\sim kM/r^2$. Matemaatika osast aga mäletame, et funktsiooni $1/x^2$ tõus väikestel x peaaegu ei muutu, ehkki tema väärtus on suur. See ongi selle **füüsikalise** lähenduse (konstantne g väärtus maalähedases ruumis) **matemaatiline** alus**.**

Kuidas määrata torni kõrgust ampermeetri ja stopperi abil?

Vastus: tuleb ampermeeter alla visata ja mõõta stopperi abil kui kaua see kukub. Vastuse annab valem 3.10 kus $a = g$. Veelgi lihtsam on käivitatud stopper alla visata, mis seiskub maapinnale jõudes.

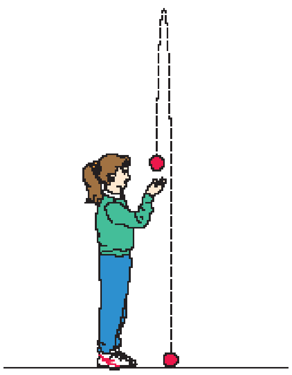


figure 3.9 A ball thrown upward returns to the ground. What are the magnitude and direction of the velocity at different points in the flight?

W. T. Griffith. *The Physics of Everyday Phenomena. A Conceptual Introduction to Physics*. Mc Graw Hill 2004

Kui suure algkiirusega peab pumpama vett, et purskkaevu juga kerkiks 30 m kõrgusele?

Niisuguste ülesannete puhul, kus kiirus väheneb lõpuks nullini soovitatakse ette kujutada pöördprotsessi: **Kui suur oleks lõppkiirus kui vesi langeb 30 m kõrguselt?**

Vastuse annab valem $v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 30} = 24.2$ m/s. Veelgi elegantsem on selliste ülesannete puhul energia jäävuse seaduse $\frac{mv^2}{2} = mgh$ kasutamine.

Kui kõrgele ja kui kaugele ulatub sama juga kui see suunata 45° all kaldu?

See on juba keerukam ülesanne, kus kiirus tuleb jagada vertikaal- ja

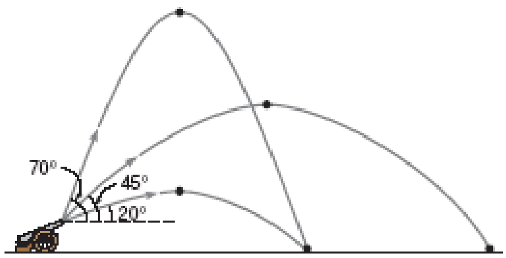


figure 3.19 Cannonball paths for different launch angles but the same initial launch speed.

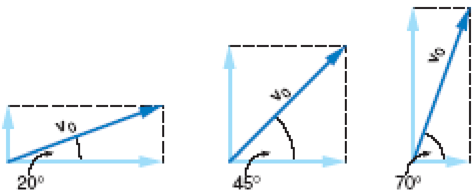


figure 3.20 Vector diagrams showing the horizontal and vertical components of the initial velocity for the three cases illustrated in figure 3.19.

W. T. Griffith. *The Physics of Everyday Phenomena. A Conceptual Introduction to Physics*. Mc Graw Hill 2004 horisontaalkomponendiks.

Leiame kiiruse komponendid teades, et sin45° = cos45° = $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$: $v_v = v_h$ = 0.7*24.2=16.9 m s^{-1}. Nüüd tuleb küsida, kui kaua aega võtab sellise kiiruse saavutamine (t= v_v/g) ja kasutada valemit **tõusu kõrguse** rehkendamiseks $s_v = \frac{gt^2}{2} = \frac{v_v^2}{2g}$. **Horisontaalkauguse** rehkendamiseks peame meeles pidama, et vesi püsib õhus 2 korda kauem, kui kulub joa maksimumkõrguse saavutamiseks (sama aeg kulub ju veel alla kukkumiseks). Seega $s_h = v_h 2t = 2\frac{v_h^2}{g} = 2\frac{2gs_v}{g}$ ehk $\frac{s_h}{s_v} = 4$, sest kiirused on võrdsed.

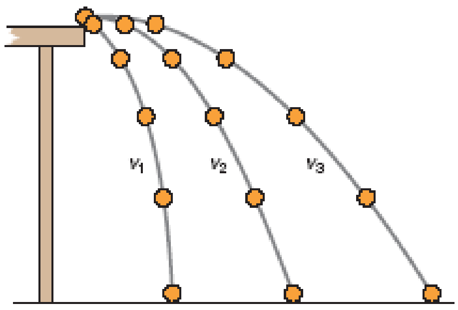


figure 3.15 Trajectories for different initial velocities of a ball rolling off a table: v_3 is larger than v_2, which in turn is larger than v_1.

W. T. Griffith. *The Physics of Everyday Phenomena. A Conceptual Introduction to Physics*. Mc Graw Hill 2004

Kuidas peab piloot juhtima lennukit, et kabiinis tekiks kaaluta olek?

Piirdume siin kvalitatiivse vastusega. Kabiinis on kaaluta olek siis, kui lennuk liigub vaba langemise trajektoori mööda, seega samasugust trajektoori mööda nagu liigub eelmises ülesandes kaldu asetatud torust väljapurskuv vesi. See on paraboolikujuline trajektoor, mis algab suure kiirusega üles-suunatud harul, läbib maksimumkõrguse ja edasi liigub sümmeetriliselt alla. Samuti liigub püssist lastud kuul ja üldse igasugune vabalt raskusväljas liikuv keha.

3.4. Ringjooneline liikumine

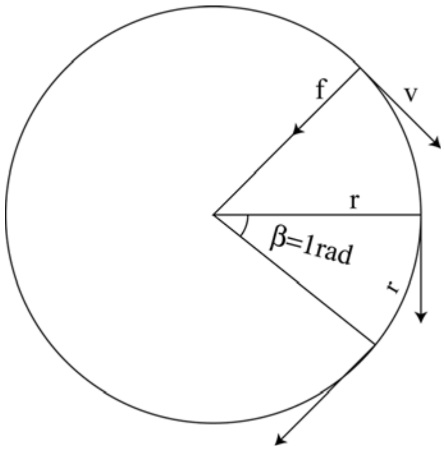
Ringjooneline liikumine on erijuhus üldisest **kõverjoonelisest liikumisest**.

Igasugune kõverjooneline liikumine on kiirendusega liikumine, seega ka liikumine ringjoonel, isegi kui see toimub ühtlase (ajas muutumatu) kiirusega.

Proovige keerutada nööri otsa seotud kivi. Tunnete, et on vaja pingutada lihaseid. Milleks jõud kui kivi kiirus ei muutu? Selleks, et kallutada kivi kõrvale inertsiaalsest sirgest teest. Planeedid liiguvad ringile lähedastel (täpsemalt elliptilistel) orbiitidel, järelikult samuti kiirenevalt.

Ringjoonelisel liikumisel on igapäevaelus palju rakendusi, seetõttu vaatlemegi seda liikumisvormi eraldi.

- Taevakehade liikumine
- Ratas
- Tsirkulatsioonpump
- Tsentrifuug
- Koorelahutaja (tsentrifuugi eelkäija)
- Elektrimootorid, generaatorid ja gaasiturbiinid
- Ventilaatorid
- Molekulaarmootorid
- Sport (ketas, vasar).



Ühtlasel ringjoonelisel liikumisel fikseeritud raadiusega on kiirusvektor suunatud **puutuja** suunas. **Kesktõmbejõud *f* mõjub kiirusega risti**; see ei muuda kiiruse absoluutväärtust, kuid muudab kiiruse suunda.

Ühtlase ringjoonelise liikumise tangentsiaal- (puutujasuunaline) **kiirus**

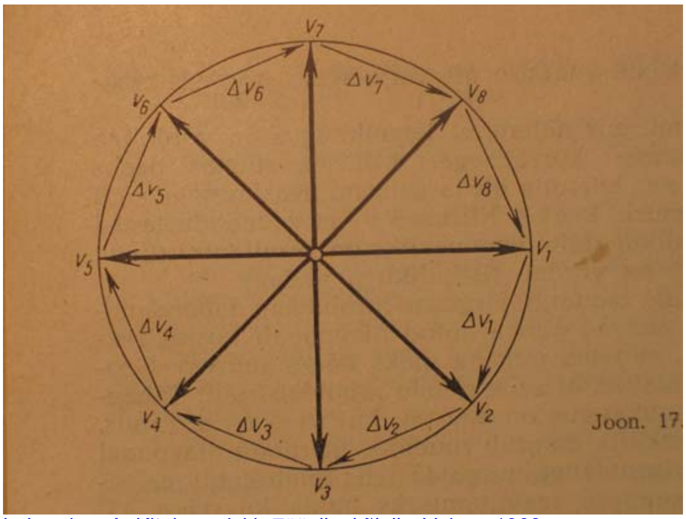
$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi \nu r = \omega r,$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

kus *r* on raadius, T on tiirlemisperiood ja ν **on pöörlemissagedus** dimensiooniga 1/s (e pöörete arv sekundis), ω aga tähistab **nurkkiirust**. **Nurkkiirus** on radiaanides mõõdetava pöördenurga suurenemise kiirus $\omega = \frac{d\beta}{dt}$, tema ühik on seega radiaani sekundis, rad/s.

Radiaan on nurk, millele vastav ringi kaare pikkus on võrdne raadiusega. Täisringi pikkus on $2\pi r$, seega vastab täisring $2\pi r/r=2\pi$ radiaanile. Kraadimõõdus siis 1 rad = 360 kraad: 2π = 57.3 kraadi. Peame meeles, et radiaan on dimensioonitu suurus, m/m (nurk, millele vastab raadiuse pikkusega võrdne kaar). Pöörlemiskiirus **üks tiir sekundis tähendab siis nurkkiirust 2π radiaani sekundis**.

Ühtlase ringjoonelise liikumise **tangentsiaal- (puutujasuunaline) kiirendus** =0, sest ringjoonel liikumise kiirus ei muutu. Milline on aga tema **radiaalkiirendus e ristikiirendus** (liikumissuunaga risti toimiv kiirendus)? Radiaalkiirendust põhjustab kesktõmbejõud ja seepärast on ka radiaalkiirendusvektor **suunatud pöörlemistsentrisse risti puutujasuunalise kiirusega**.



L. Landau, A. Kitaigorodski. *Füüsika kõigile*. Valgus 1968

Leiame ristkiirenduse valemi kasutades abivahendina kõrvalolevat joonist. See on ring, mille raadiuseks on tangentsiaalkiirus. Sellise kiiruste muutustest moodustatud ringi ringjoone pikkus on $2\pi v$. Ühe täisringi jooksul toimunud kiiruse muutus ehk kiirendus avaldub siis kui $a_n = \frac{2\pi v}{T}$. Teisalt saame täisringi tegemiseks kulunud aja avaldada järgmiselt: $T = \frac{2\pi r}{v}$.

Asendades saame

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r = 4\pi^2 n^2 r .$$

kus ω on jälle nurkkiirus ja $n=1/T$ on pööretete arv sekundis.

Samasuguse avaldise saame ka eelmist joonist analüüsides. Tõepoolest, geomeetriast on näha, et lühikese aja korral $\frac{\Delta v}{v} = \frac{v \Delta t}{r}$ ja $\Delta v / \Delta t = v^2 / r$.

Kiirendus on seda suurem, mida suurem on konstantse raadiuse korral joonkiirus, konstantse pöörlemissageduse korra aga mida suurem on ringi raadius. Sama kehtib jõu kohta, sest *F=ma*. Neid valemeid kasutame hiljem elektroni kiiruse ja asukoha arvutamisel aatomis.

Ülaltoodus valem võimaldab lihtsalt välja arvutada näiteks vabalt langeva sputniku/kosmoselaeva orbitaallennu puutujasuunalise kiiruse (nn **I kosmiline kiirus**), kui radiaalkiirendus võrdsustada gravitatsioonikiirendusega (vaba langemise kiirendusega) *g* ja *r*=6500 km: $v = \sqrt{gr} =$~8 km/s=8x3600=28800 km/h.

Mitu meetrit kukub iga 8 km pikkuse orbitaallennu (orbitaallennul kosmoselaeva kaugus Maast ei muutu (s_0=const=0)**) ajal sputnik?** Kasuta $s = \frac{gt^2}{2}$.

Kuidas käitub keha, kui tsentrisuunaline jõud kaob?

Millal peab kettaheitja ketta käest lahti laskma, et sektorisse tabada?

Hea auto kiirendab kohapealt kiiruseni 100 km/h 10 sekundiga. **Milline on tema kiirendus?** *a=v/t*=100:10:3.6~2.8 m/s^2. **Kui pika vahemaa ta seejuures läbib?** $s=at^2/2$~139 m.

Üldjuhul võib muutuda ka tangentsiaalne (puutujasuunaline) kiirus. Siis pole kiirendus muidugi enam ringi tsentrisse suunatud, vaid pigem suunas

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t .$$

3.5. Perioodiline võnkeliikumine ja kehade tasakaal

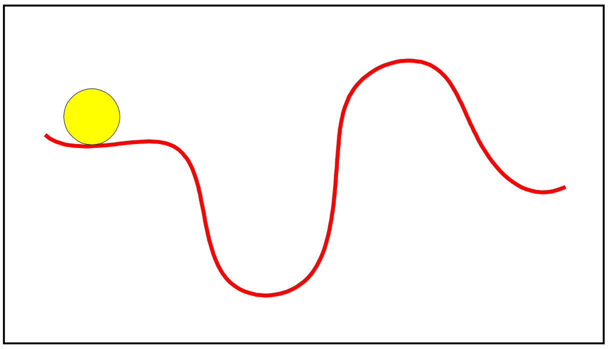
Üks tähtis ja väga levinud liikumise liik, mille puhul **kiirus ja kiirendus pidevalt ajas muutuvad** on võnkumised.

Võnkumiseks nimetatakse keha liikumist tasakaaluasendi ümber. Võnkumised on seega tihedalt seotud kehade **tasakaalu** mõistega.

Mis määrab keha tasakaaluasendi?

Vaatleme lihtsuse mõttes seisvat keha. Nt kollane pall punase joonega tähistatud konarlikul maapinnal. Eristatakse **kolme liiki tasakaalu** :

- **püsivat** (raskuskese tõuseb, kui palli tasakaaluasendist välja nihutada)
- **labiilset e ebapüsivat** (raskuskese langeb, nt tera peale toetuv pliiats)
- **ükskõikset** (raskuskese ei muutu)

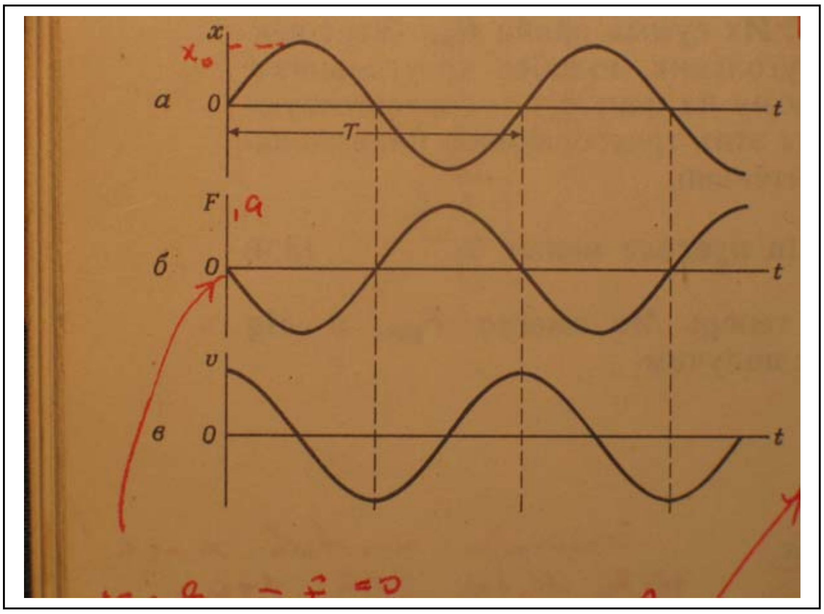


Võnkumised tekivad vaid siis, kui keha nihutatakse välja stabiilsest tasakaaluasendist. Näiteks pall muru lohus, pendel või vedru otsas rippuv raskus, aatomite või molekulide võnkumine tasakaaluasendi ümber. Väikeste kõrvalekallete puhul on seejuures kehale mõjuv jõud proportsionaalne nihke suurusega ning mõjub tasakaaluasendi suunas, s.t. "töötab" nihkele vastupidises suunas (mäletate teist järku differentsiaalvõrrandit, mis seda tüüpi liikumisi kirjeldab?).

Miks see tasakaaluasendisse suunatud jõud tekib?

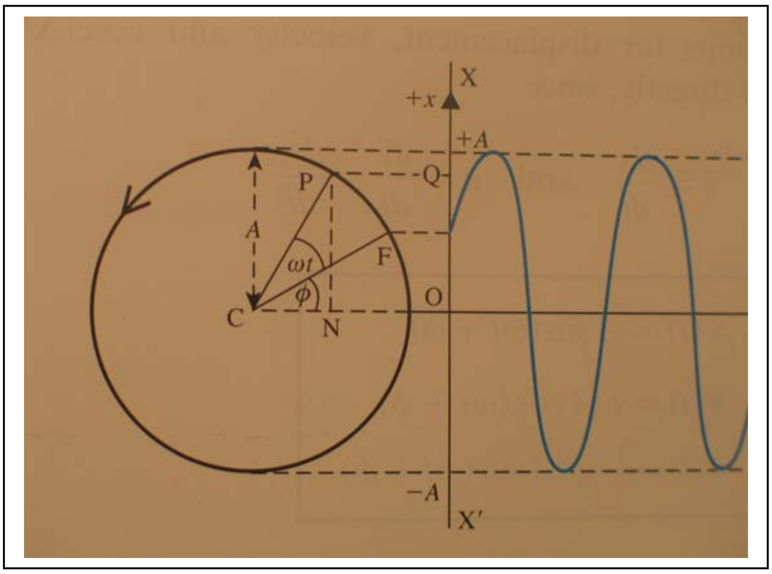
Meie esimeses loengus tegime juba põgusalt juttu jõudude olemusest, nende üldistest tekkepõhjustest. Jõud tekivad kui kehasid ümbritsev väli (meie puhul gravitatsiooni- ja/või elektriväli) ruumis muutub. Jõud on võrdeline välja iseloomustava potentsiaalse (ehk asukohast sõltuva) energia muutumise kiirusega ruumis (vastava **ruumilise tuletisega** või gradiendiga).

Murus olev lohk, mille põhjas pall rahulikult lebab ei ole midagi muud kui gravitatsioonilise potentsiaalse energia lehter. Stabiilses tasakaaluasendis lohu põhjas olevale pallile ei mõju mingit jõudu, sest potentsiaalse energia miinimumis (augu põhjas) võetud tuletis =0. Tuletis, s.t. jõud on 0 ka potentsiaalse energia kõvera maksimumis (kühmu peal), kuid väikseimgi tõuge sunnib palli mäe otsast alla veerema. Seega keha on stabiilses tasakaalus kui tema potentsiaalne energia on minimaalne. Niipea kui keha liigub stabiilsest tasakaaluasendist välja, hakkab tema potentsiaalne energia kasvama. Selle kasvu kiirus määrab jõu, mis püüab keha tasakaaluasendisse tagasi viia. See jõud viibki keha trajektoori võnkuvale liikumisele tasakaaluasendi ümber. Vahel räägitakse veel nn **absoluutset** ja **lokaalset** potentsiaalse energia miinimumi, kuid see on antud hetkel ebaoluline nüanss.



Kokkuvõtvalt võime öelda, et keha tasakaalu määrab neid ümbritsevate väljade potentsiaalse energia eriline kuju. Seega keha püsivaks tasakaaluks on vajalik ei rohkem ega vähem kui potentsiaalse energia lohu olemasolu. Klassikalise mehaanika raames on see ka **piisav** tasakaalu tingimus. Peame meeles, et **liikumisel püsiva tasakaaluasendi läheduses on alati võnkuv iseloom**.

Harmooniliste (sinusoidaalsete või kosinusoidaalsete) **võnkumise** korral **muutuvad** keha liikumise **kiirus ja kiirendus perioodiliselt** (vt joonist). Seejuures perioodiliselt muutub mitte ainult kiiruse ja kiirenduse/jõu arvuline väärtus vaid ka nende **suund (märk)**.



Harmoonilisi võnkumisi saab ette kujutada, kui osakese ringjoonelise liikumise projektsiooni (vt joonist). Ringliikumist võib omakorda käsitleda kui kahe ristisuunalise, kuid faasis nihutatud, võnkumise summat.

Võnkumisi iseloomustavad:

- kõrvalekalle tasakaaluasendist x
- maksimaalne amplituud A
- periood T
- sagedus ω
- algfaas ϕ
- aeg t kui parameeter

Faas $\omega t + \phi$ iseloomustab võnkesüsteemi hetkeseisu. Teadaoleva amplituudi korral määrab faas võnkesüsteemi oleku mis tahes ajamomendil.

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

Eristatakse **sumbuvaid** ja **mittesumbuvad** ning **vaba**- ja **sundvõnkumisi**. Sumbumine põhjustab sageduse ja maksimaalse amplituudi alanemist ning võnkeperioodi pikenemist. Kui sumbumine on väike, siis võnkumised võivad kesta väga kaua (piiril lõpmata kaua). Sundvõnkumised tekivad mingi täiendava välise jõu olemasolul.

Mis vahe on võnkumistel ja lainetel?

Me ütleme, et pendel võngub, aga merevesi lainetab. Erinevalt väljendutakse asja pärast, mitte lihtsalt keeleilu tõttu.

Võnkuda võib ka **üks** osake (nt idaliseeritud punktmass). **Lained** on aga ruumis edasilevivad võnkumised, mis eeldab **paljude vastastikmõjus olevate osakeste** olemasolu. **Lained esinevad seega ulatusega süsteemides.** Edasilevimine tuleneb sellest, et mingis ruumipunktis toimuv muutus kutsub esile sarnase muutuse naaberpunktis, aga veidi hiljem, vastavalt võnkeärrituse edasilevimise kiirusele.

Eristatakse **piki- ja ristilaineid**. Nimest saab aru, mis suunas osakesed laines võnguvad. Nt elektromagnetväli, mis on elementaarosakeste laineomaduste aluseks, on ristilaine. Helilained on aga pikilained.

Punktmass koordinaatide alguspunktis 0 võngub vastavalt võrrandile (siinuse asemel võib väga hästi ka koosinus olla ja algfaas on võrdsustatud 0-ga)

$$y = A\sin\omega t\,.$$

Eemalasuva punkti x võnkumist kirjeldab siis võrrand

$$y = A\sin\omega(t - \frac{x}{c})\,.$$

See on **ühemõõtmelise laine võrrand**, mis kirjeldab kõikide punktide liikumist (laine levimist) ajas piki x-koordinaati. *c* on laine (õigemini tema teatud koha või faasi) levimise kiirus e **faasikiiruseks**. *x/c* on siis faasi levimiseks kulunud aeg. Faasikiirus sõltub laine levimise keskonnast ja ei ole ilmtingimata võrdne valguse kiirusega vaakumis, ehkki tähistus on sama. Näiteks pikilainete levimiskiirus $c = \frac{1}{\sqrt{\rho\kappa}}$ sõltub keha tihedusest ρ ja kokkusurutavusest κ.

Faasikiirus, sagedus ja lainepikkus on omavahel seotud: $c = \nu\lambda$. Tuues nüüd sisse nn **lainearvu** mõiste $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, saame kirjutada:

$$y = A\sin\left(\omega t - kx\right)$$, sest .

$\omega\frac{x}{c} = 2\pi\nu\frac{x}{\nu\lambda} = kx$. See on ühemõõtmelise lainevõrrandi tavapärane kuju.

Kordame veelkord üle. **Võnkumine** on ajas perioodiline protsess. **Laine** on aga perioodiline protsess nii ajas (iseloomustab sõltuvus t-st) kui ka ruumis (iseloomustab sõltuvus x-st).

Sagedus ν mõõdab võngete arvu sekundis; **lainearv** $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$ aga lainete arvu pikkusühikus. Näiteks 1 cm kohta e cm^{-1}. Pöördsentimeetrit kasutatakse energiaühikuna siiani laialdaselt spektroskoopias, vaatamata tema süsteemivälisusele.

Faasi- ja grupikiirus

Tuleb teha vahet lainete faasi- ja grupikiiruse vahel. Faasikiirusega levib ainult monokromaatse laine front (faas). Lainete grupp e pulss levib aga grupikiirusega, mis on faasikiirusest väiksem (piiril sellega võrdne). Grupi jaoks on vajalik kahe või enama monokromaatse laine/sageduse olemasolu.

Võtame kokku

Liikumise liik	Kiirus	Kiirendus
Ühtlane	const	0
Ühtlaselt kiirenev	Ühtlaselt muutuv	const
Mitteühtlaselt kiirenev	Muutub ebaühtlaselt	Muutub

Üldistus: Kulg- ja pöördliikumine

Füüsikaline suurus	Kulgliikumine	Pöördliikumine	
Nihe/läbitud tee (m)	$s = vt$	Pöördenurk/nurk nihe (rad=m/m=1) φ $\varphi = \omega t$	Lineaarnihe (nihe pikki trajektoori) $s_l = \varphi r = \omega r t$
Kiirus (m/s)	$v = \frac{ds}{dt}$ $v = at$	Nurkkiirus (rad/s) $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ $\omega = \alpha t$	Lineaarkiirus $v_l = \omega r = 2\pi r \nu = \alpha r t$
Kiirendus (m/s/s)	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$ $s = \frac{at^2}{2}$	Nurkkiirendus (m/s/s) $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ $\varphi = \frac{\alpha t^2}{2}$	Radiaalkiirendus $a_r = \omega^2 r = \frac{v_l^2}{r}$