2. Matemaatiline põhivara

2.1. Matemaatika olulisus

Teooria on maailmapilt ehk maailma mudel, mis käivitub meie mõtlemises. Mõtlemise tugev külg on suhteliselt keerukate süsteemide kiire **kvalitatiivne** analüüs. Kuid mõõtmiste tulemuseks on arvulised väärtused ja hinnata tuleb seega **kvantitatiivseid** suurusi ja nende suhteid. Tuletame meelde, et mõõtmine on mingi standardiga/ühikuga võrdlemine. Siin jääb mõtlemine üsna varsti jänni ja kutsub appi matemaatika. Matemaatilised valemid ei ole midagi muud kui lühidalt kirjapandud reeglid numbriliste suurustega opereerimiseks, seega on matemaatika **abivahend** mudeli (teooria) kvantitatiivseks analüüsiks. Teades nähtuse või protsessi funktsionaalset sõltuvust võime siis puhtalt matemaatilise analüüsi abil ette ennustada protsessi kulgu ilma sellele protsessi konkreetsetele iseärasustele tähelepanu pööramata. Aga see on just see, mida me ühelt healt teoorialt ootame: võimalust ette ennustada süsteemi käitumist tingimustes mida pole veel katseliselt kontrollitud või mida mingitel põhjustel polegi võimalik kontrollida.

Matemaatika kasutamise eelis seisneb selles, et ühe ja sellesama valemiga võib kirjeldada väga erinevaid nähtusi, mis on oma käitumiselt sarnased, kuigi sisult täiesti erinevad. Seega on vajalike matemaatiliste valemite arv tunduvalt väiksem kui analüüsitavate nähtuste või protsesside arv.

Siin võib märgata analoogiat kompuutrites kasutatavate andmetihendus-e zippimisvõtetega. Et arvuti mälumahtu säästa surutakse info hoidmiseks võimalikult kompaktselt kokku. Vastavad tarkade inimeste (matemaatiliste infotehnoloogide) poolt koostatud programmid oskavad vajadusel selle info jälle kättesaadavaks teha (unzippida). Füüsika juurde tagasi tulles, selleks et matemaatika valemitesse kodeeritud füüsikalist infot kätte saada ja seda mõista, peame meiegi vajalikul määral matemaatikat tundma.

Järgnevas vaatlemegi peamisi matemaatiliste avaldiste tüüpe, mis antud kursuses käsitletavate füüsikaliste nähtuste ja protsesside analüüsil ette võivad tulla.

2.2. Funktsioonid

Funktsioon on matemaatiline seos mitme suuruse vahel, mille järgi saab arvutada tundmatu suuruse (st funktsiooni, *y*) väärtuse kui argumentide x_i väärtused on teada: $y = f(x_1, x_2 ... x_n)$. *f* tähistab mingit matemaatilist arvutusreeglit (tehteid ja nende kombinatsioone), nt astendamist.

Katseandmete (funktsionaalsete sõltuvuste) esitamiseks on mitmeid võimalusi:

- Tabel

- graafik (ülevaatlik)
- valem (sobiv matemaatilisteks manipulatsioonideks)

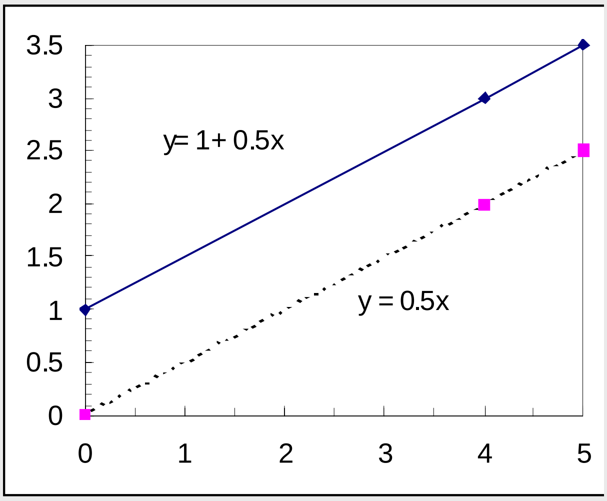
Lihtsaim funktsioon on ühe muutuja funktsioon $y = f(x)$.

Näiteks astmefunktsioon (n on astmenäitaja) üldvalemiga

$$y = a + bx^n$$

0-astme funktsioon on konstant sest suvaline arv astmel 0 =1.

Levinuim astmefunktsioon on lineaarne (sirge) ehk **esimese astme sõltuvus**:



Lineaarfunktsioon ja proportsionaalne sõltuvus. Lineaarfunktsiooni iseloomustavad kaks parameetrit: **b** ehk **tõus/langus (mis on konstant)** ja lõikepunkt y-teljega ***a*** e **funktsiooni algväärtus.**

$$y = a + bx.$$

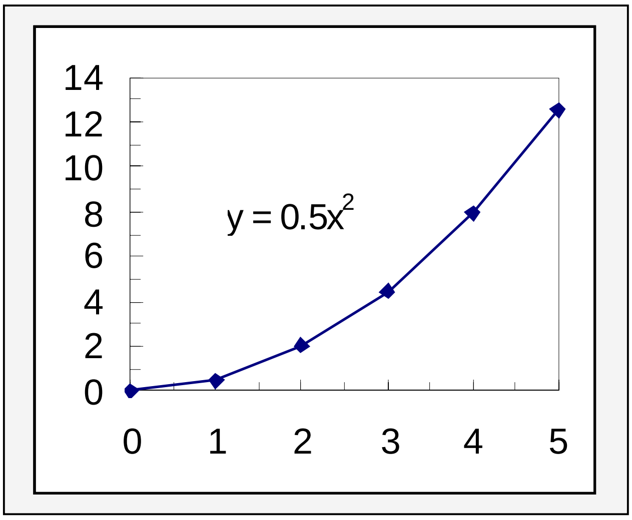
a on siin mingi algseis/funktsiooni algväärtus, millest protsess algab ja *b* tähistab funktsiooni **tõusu** ehk *y* kasvu suhtelist kiirust võrreldes *x* kasvuga:

$$\frac{\vartriangle y}{\vartriangle x} = \frac{y - a}{x} = b = const$$

Lineaarfunktsiooni erijuht on **proportsionaalne** sõltuvus, kus *a* = 0 ja mõlemad, nii *x* kui *y* alustavad muutumist nullist.

Lineaarse/proportsionaalse sõltuvuse näiteks olgu sellised oma füüsikaliselt sisult erinevad nähtused/protsessid nagu

- **läbikäidud tee** sõltuvus ajast $s = s_0 + vt$
- **voolutugevuse** sõltuvus pingest $I = \dfrac{U}{R}$ (Ohmi seadus, kas tunnete ära?)
- **ringjoone pikkuse** sõltuvus raadiusest: $L = 2\pi r$
- **veevoolu kiiruse** sõltuvus rõhkude vahest
- **difusioonivoo kiiruse** sõltuvus kontsentratsioonide vahest jne



Teise astme funktsioon on **ruutsõltuvus**:

$$y = bx^2$$

Ruutsõltuvus võib sisaldada osana ka lineaarsõltuvust, kuid lihtsuse mõttes on see siin välja jäetud.

Ruutsõltuvuse näideteks on

- **pindala** sõltuvus lineaarmõõdust. Pange tähele, et kõik pindala valemid sisaldavad argumendi (lineaarmõõdu) ruutu.

  Ruudu pindala $s = a^2$, kus *a* on ruudu külje pikkus.

  Ringi pindala $s = \pi r^2$ kus *r* on raadius.

  Kera pindala $s = 4\pi r^2$.

- **Ühtlaselt kiireneva liikumise korral läbitud tee pikkuse** sõltuvus ajast:

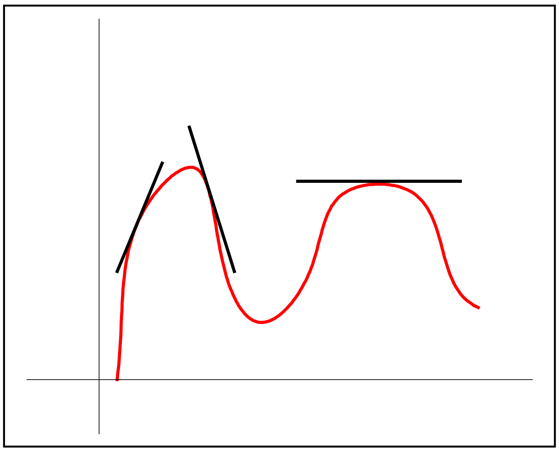
  $s = \dfrac{at^2}{2}$ (*a* on siin kiirendus ja liikumist alustati paigalseisust).

Ruutsõltuvus eemaldub nullist horisontaalselt (väärtusel x = 0 on **tõus** 0) ja jätkab **lineaarselt kiireneva**

tõusuga $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = 2bx$.

Lineaarfunktsiooni tõus on suht selge asi. **Aga kuidas keerulisema funktsiooni tõusust aru saada?**

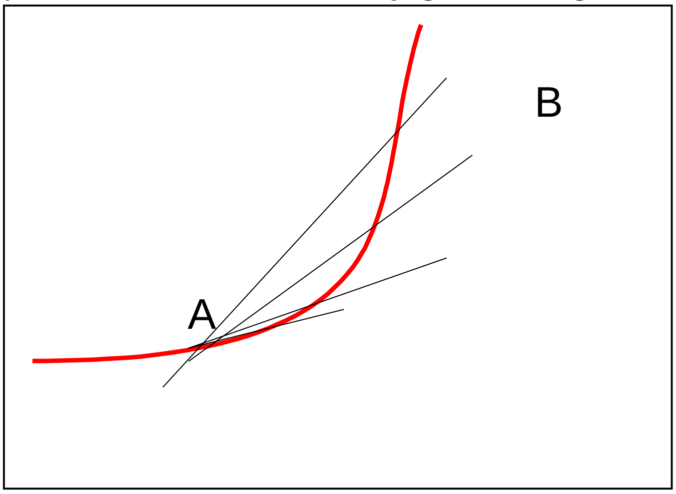
Funktsiooni tõusu $\left.\dfrac{\triangle y}{\triangle x}\right|_x$ arvutatakse kui funktsiooni **puutuja** (inglise k *tangent*) tõusu antud argumendi väärtusel (st kohal x, vt joonist).



Nagu näeme, võib tõus omada nii positiivset kui ka negatiivset väärtust ja samuti olla = 0. Kuivõrd funktsiooni tõus sõltub argumendi väärtusest ja et sellel konkreetselt fikseeritud argumendi väärtusel mingi mõte oleks, siis tuleb tõusu arvutada võimalikult väikese argumendi muutuse Δx korral, piiril lõpmata väikese muutuse korral:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = tuletis.$$

Saadud tulemust nimetatakse funktsiooni **tuletiseks**. Tuletise leidmise protseduuri **st funktsiooni jagamist sirglõikudeks ja vastavate tõusude leidmist** nimetatakse aga funktsiooni **diferentseerimiseks**.



Iga sile, st ilma murdekohtadeta funktsioon, on lühikesteks puutujasuunalisteks sirglõikudeks jagatav ja seega diferentseeritav. Peaks olema arusaadav, et mida rohkem on lõike, seda täpsemini saab funktsioon sirglõikudega lähendada (vt joonist).

Diferentseerimise tähtsus

Kui teame funktsiooni tuletist, siis teame ka kui kiiresti funktsiooni antud argumendi väärtusel muutub. Funktsiooni juurdekasv argumendi muutumisel dx võrra avaldub kui

$$dy = y'(x)dx$$

dy nimetatakse **funktsiooni diferentsiaaliks**.

Esimest järku astmefunktsiooni tõus on const (ei muutu x-ga), seega võime kirjutada $y = y'x = constx$, mis kehtib iga y ja x korral.

Astmefunktsiooni diferentseerimise reegel

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}ax^n = nax^{n-1}$$

Kolmanda astme funktsiooni ehk kuupsõltuvuse

$$y = bx^3$$

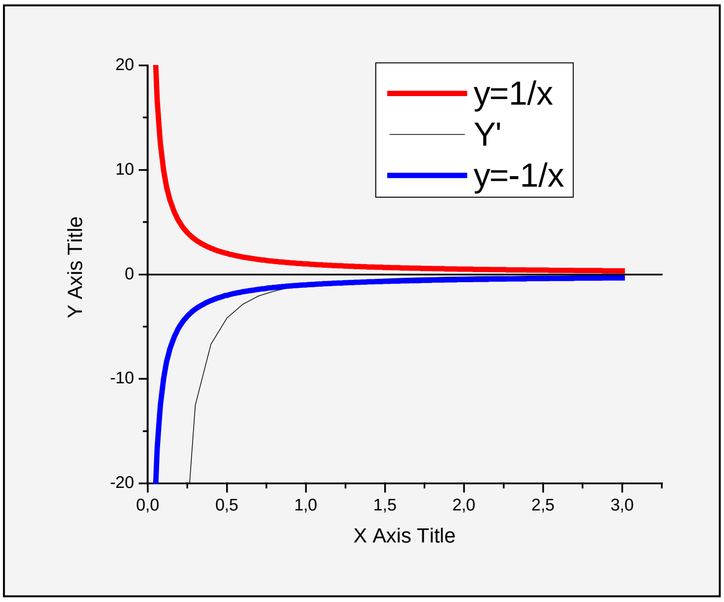
näiteks oleks **ruumala** sõltuvus lineaarmõõdust:

- Kuubi ruumala $V = a^3$
- kera ruumala $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Tõus $\frac{\triangle y}{\triangle x} = 3bx^2$, mis on 0 argumendi väärtusel x=0, kasvab argumendi suurenedes proportsionaalselt argumendi ruuduga.

Pöördvõrdeline sõltuvus

Pöördvõrdeline sõltuvus on samuti astmefunktsioon, kusjuures astmenäitaja on **-n**:



Esimese astme pöördvõrdelist sõltuvust kutsutakse ka **hüperboolseks** sõltuvuseks.

$$y = \frac{a}{x} = ax^{-1},$$

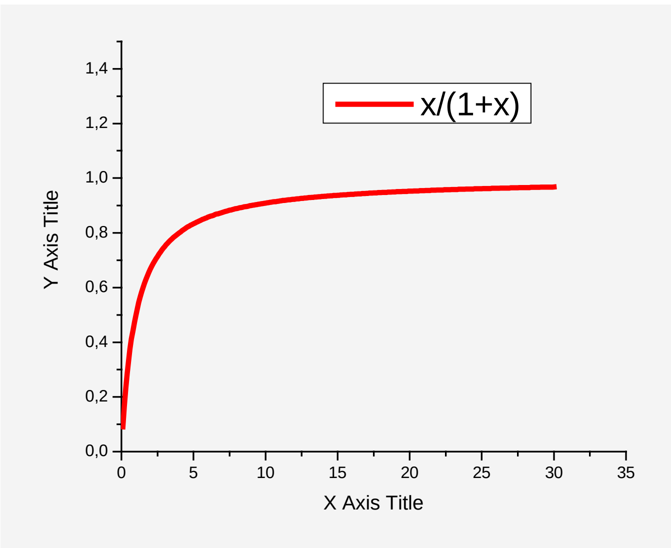
mille näideteks võiksid olla järgmised füüsikalised protsessid

- **voolutugevuse** sõltuvus juhtme takistusest $I = \frac{U}{R}$
- **liikumiseks kulutatud aja** sõltuvus kiirusest $t = \frac{s}{v}$
- **elektroni potentsiaalse** **energia** sõltuvus kaugusest tuumast $E = -k_e \frac{Ze^2}{r}$
- analoogiline on **gravitatsioonienergia** sõltuvus kaugusest kehade vahel $E = -k_g \frac{mM}{r}$.

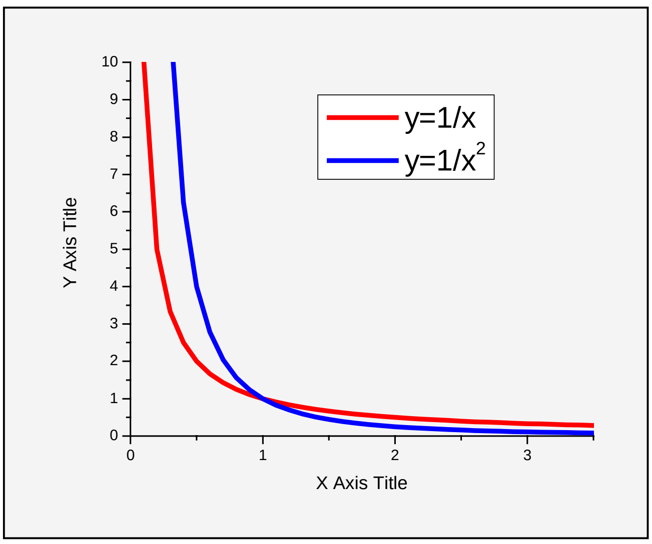
Pange tähele erinevust 1/r ja –1/r vahel! Mõlemale sõltuvusele on iseloomulik, et nende tõus/langus e energiavälja muutumise kiirus, mis $\propto \frac{1}{r^2}$, on lõpmatu suur väikestel argumendi r väärtustel ja läheneb asümptootiliselt 0-le suurtel argumendi väärtustel (vt joonist).

Sellise keeruliselt ja järsult muutuva funktsiooni pärast räägitaksegi näiteks kosmoselendude puhul, et teatud lennu etapil (teatud kaugusel) sattus kosmoselaev ühe või teise taevakeha mõjuvälja. Tegelikult ulatub gravitatsiooni mõju lõpmatusse, kuid suurtel kaugustel on välja muutumise kiirus väike. See tähendab jõud, mis laevale selle taevakeha poolt avaldatakse on veel väike. Teatud lähenemiskaugusel hakkab potentsiaalne energia kiiresti muutuma. Laevale mõjuv jõud nagu me eelmises loengus rääkisime on aga just välja muutumise kiirusega proportsionaalne ja see jõud võib nüüd laeva liikumist tugevalt mõjutada.

Selles näites ilmneb tuletise/gradiendi **füüsikaline sisu** energiaväljades.



Bioloogias on tähtis alguses (kui *x* on väike) kiiresti ja hiljem järjest aeglasemalt tõusev kombineeritud hüperboolne sõltuvus, mille abil kirjeldatakse näit. **ensümaatiliste reaktsioonide kiirust** $v = ax/(b+x)$ sõltuvalt substraadi kontsentratsioonist x. Funktsioon eemaldub nullist tõusuga *a/b* (graafikul =1/1=1), saavutab poole maksimaalväärtusest siis kui *x* = *b* (=1) ja küllastub kõrgusel *a* siis kui $x \to \infty$ (=1 lõpmatusele lähenedes).



Pöördvõrdelise ruutsõltuvuse näiteks on funktsioon

$$y = \frac{a}{x^2}.$$

Sellist sõltuvust omab näiteks **punktikujulise laengu või massi elektri- või gravitatsioonivälja tugevuse (jõu) sõltuvus kaugusest** masside või laengute keskpunktidest.

Pöördvõrdelise sõltuvuse ja pöördvõrdelise ruutsõltuvuse väärtused on vaid ühes kohas (argumendi väärtusel 1) võrdsed. Väiksematel argumendi väärtustel muutub pöördvõrdeline ruutsõltuvus kiiremini kui pöördvõrdeline sõltuvus. Suurematel argumendi väärtustel muutub see vahekord vastupidiseks.

Väga tähtis funktsioon on **eksponentsiaalne sõltuvus**

$$y = y_0 e^{ax}.$$

Siin y_0 on funktsiooni algväärtus; astmenäitajat *a* nimetatakse **kiiruskonstandiks**. Kui astmenäitaja on esitatud pöördväärtusena (**a=1/τ**; $y = y_0 e^{-x/\tau}$) siis τ nimetatakse **eksponendi teguriks** (näit. radioaktiivse lagunemise või kondensaatori tühjenemise puhul **ajategur**).

Eksponentsiaalfunktsiooni defineeritakse kui lõpmatut jada

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ...$$

Siit siis ka arvu e numbriline väärtus:

$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... = 2.718....$ Mõnikord kasutatakse eksponentfunktsiooni alusena *e* asemel ka 10 (või mõnda teist arvu).

Positiivse astmenäitajaga eksponentfunktsioon kirjeldab nt

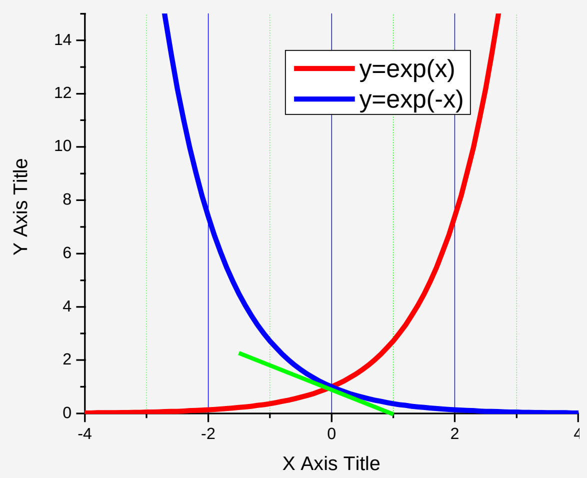
- **bakterikoloonia kasvu ajas** (alguses, kui toitu on palju, aga hiljem see küllastub sarnaselt ensümaatilise reaktsiooni kiiruse valemiga)
- **kapitali suurenemist** firmas (ka see tavaliselt küllastub).

Negatiivse astmenäitajaga eksponentfunktsioon $y = y_0 e^{-ax}$ kirjeldab aga nt

- **radioaktiivselt lagunevate tuumade arvu**
- **valguskvantide arvu vähenemist** neelavat keskkonda läbides
- **kondensaatori laengu tühjenemist** läbi takisti
- edukate üliõpilaste arvu kahanemist õpiaja jooksul.

Eksponentfunktsiooni kõige iseloomulikumaks jooneks on, et **funktsiooni kasvu/kahanemise suhteline kiirus ei muutu, st tema tuletis on kogu aeg iseendaga võrdeline**

$$\frac{dy}{dx} = \pm a y_0 e^{\pm ax} = \pm a y.$$



Positiivse astendajaga eksponentfunktsioon (punane) algab väärtusel y =0 ja kasvab kiirenevalt. Negatiivse astendajaga eksponent (sinine) lähtub algväärtusest lõpmatus ja langeb aeglustuvalt. Kustuva eksponendi puutuja kohal x=0 (roheline sirge) sihib eksponenditegurile ($\tau = 1$ selles näites).

See tähendab, et mida suuremaks funktsioon kasvab, seda kiiremini muutub tema väärtus (seda suurem on tema absoluutne juurdekasv või kahanemine). Mida rohkem on sul kapitali, seda suurem on su kasum. Ja vastupidi, mida väiksemaks muutub funktsiooni väärtus, seda aeglasemalt ta kahaneb.

Argumendi väärtusel 0 on nii kasvav kui ka kahanev eksponentfunktsioon võrdsed, sest e^0=1. Argumendi negatiivsel lõpmatul väärtusel on kasvava eksponendi tõus 0; sümmeetriliselt on 0 ka langeva eksponendi langev tõus argumendi positiivsel lõpmatul väärtusel.

Vaatame kahanevat eksponentsiaalset protsessi, mida kirjeldab ajategur τ:

$$A = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- Aja τ möödudes on protsessi kirjeldav amplituud vähenenud e^{-1} = 1/e = 1/2.718 = 0.368 korda ehk ~37% peale esialgsest väärtusest A_0.
- Kahe ajateguri möödudes e^{-2} = 0.135 ehk 13.5% peale, mis moodustab 37% eelmisest väärtusest.
- Kolme ajateguri möödudes e^{-3}=0.050 ehk 5% peale, mis omakorda moodustab 37% e^{-2} väärtusest jne.

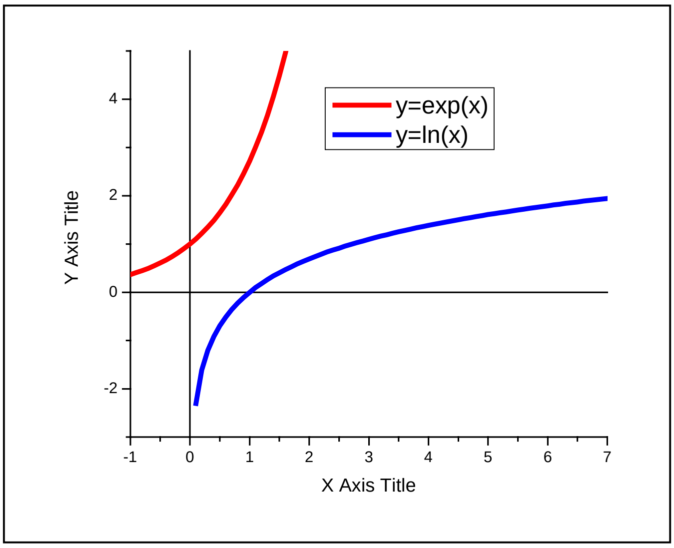
Näeme, et eksponentsiaalsete protsesside **praktilise** lõppemiseni kulub järelikult 3τ kuni 5τ (0.67%). Kahaneval eksponendil on algne väärtuse kahanemine kiire. Päris nullini ei kahane eksponent aga kunagi, see võtaks lihtsalt lõpmata kaua aega.

Suhteline majanduskasv ja rahvuslik rikkus

Sul peab algkapitali olema, et ettevõtet mõistliku ajaga kasumit tootma panna. See on ka põhjus, miks vähearenenud riigid omades küll võrdset majanduskasvu indeksit kunagi absoluutse rikkuse mõttes arenenud riikidele järele ei saa. Vahe üksnes kasvab. Kujutage ette, et ühel teist on miljard krooni ja teie aastakasum on 1%. St teie vara kasvab aastaga 10 miljoni krooni võrra. Minul on aga pangas näiteks 100000 krooni. 1% intressi korral saan ma 1000 krooni võrra rikkamaks. Pole ka paha, kuid tunduvalt vähem, kui teil.

Funktsiooni $y = f(x)$ **pöördfunktsioon** on funktsioon $x = f^{-1}(y)$.

Eksponendi pöördfunktsioon on siis logaritm. Tõepoolest, kui $y = e^x$, siis $\ln y = x$. Siit tuleneb, et **loomulik logaritm arvust *y* on arv, millega tuleb astendada *e*, et saada *y***: Kümnendlogaritm arvust *y* on arv, millega tuleb astendada 10, et saada *y*:



Kui $y = 10^x$ siis $\lg y = x$ ja $\ln y = x \ln 10 = 2.303x$. Asendades x-i saame, et $\ln y = 2.303 \lg y$.

Kuidas näeb välja logaritmfunktsiooni graafik? Nii ln 1 kui ka lg 1 = 0, sest iga arv (sh e ja 10) astmel 0 = 1. Ühest suuremate arvude logaritmid on positiivsed, ühest väiksemate arvude logaritmid on negatiivsed. $\ln 0 = -\infty$.

Funktsiooni ekstreemumid - miinimum ja maksimum

Et leida funktsiooni ekstreemume tuleb leida need kohad funktsioonil, kus **funktsiooni muutumise kiirus ehk esimene tuletis võrdub 0**.

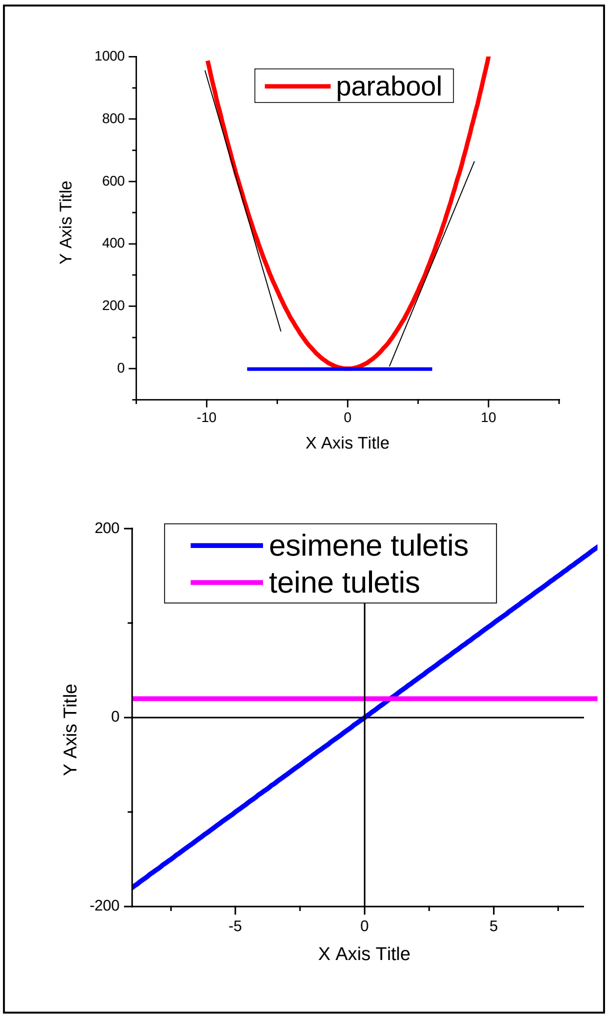
Seejärel, leidmaks, kas ekstreemum vastab funktsiooni maksimumväärtusele või miinimumile, tuleb arvutada funktsiooni teine tuletis. **Kui teine tuletis ekstreemumile vastaval argumendi väärtusel on >0**, on tegemist **miinimumiga** ja vastupidi (vt parabooli joonist)

2.3. Diferentsiaalvõrrandid. Määratud ja määramata integraalid

Diferentseerimise tulemusel saame võrrandi, mis seob omavahel suuruste väikesed muutused, nt

$$dy = y'(x)dx.$$

Sellist võrrandit nimetatakse **diferentsiaalvõrrandiks**.



Antud valem kirjeldab lihtsaimat ehk **esimest järku** diferentsiaalvõrrandit. **Diferentsiaalvõrrandi järgu** määrab otsitava funktsiooni (milleks antud näites on y(x)) tuletiste kõrgeim järk selles võrrandis. **Diferentsiaalvõrrandid on seega matemaatilised seosed mitte suuruste eneste vahel (nagu funktsioonid), vaid suuruste *muutuste* vahel** (meie näites siis dy ja dx vahel).

Lihtsaks **füüsikaliseks** näiteks võiks olla keha (nt auto) liikumisel läbitud teepikkus. Liikumisel kiirusega *v* on igas lõpmatu lühikeses ajavahemikus *dt* läbitud teepikkus

$$ds = v(t)dt = s'(t)dt.$$

Võrdlemaks ülaltoodud matemaatilise avaldisega tuleb võtta, et ds=dy ja dt=dx.

Teades auto liikumise kiirust (mis igal ajahetkel võib olla erinev, seda rõhutab kiiruse sõltuvus ajast $v(t)$) tahame teada, kui kaugele me sellise autoga sõites lõpliku aja (nt ühe tunni) pärast jõuame.

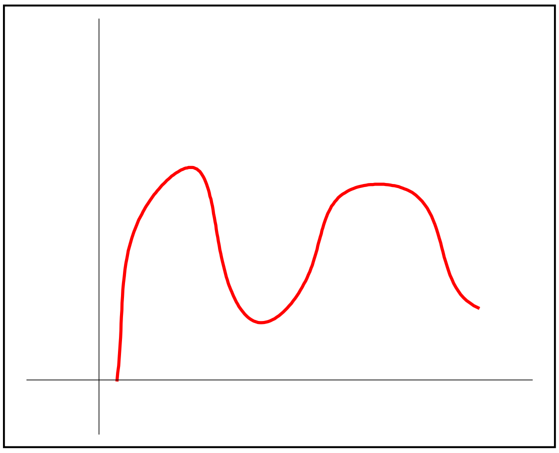
Veidi järele mõeldes saame aru, et selleks me peame lihtsalt kõikvõimalikud **võrdsete ajavahemike** jooksul läbitud elementaarvahemaad ehk ds-id kokku liitma. Asja näitlikustamiseks oletame nüüd, et 1 s on 1 h võrreldes piisavalt “lühike” aeg. (Kui kiirus on suur, ei tarvitse see õige olla, aga olgu!) Meie summas on siis 3600 (=60x60) liidetavat:

$$s = \sum_{i=1}^{3600} ds_i = \sum_{i=1}^{3600} s_i'(t)dt = \sum_{i=1}^{3600} v_i(t)dt.$$

Kui tahame täpsemat tulemust, peame tunni veel väiksemateks osadeks jagama, nt millisekundilisteks, mikrosekundilisteks või isegi pikosekundliseteks osadeks. Muide, füüsikud oskavad tänapäeval **otse** mõõta protsesse, mis kestavad femto- ja isegi attosekunded (**kaudselt** saab veelgi lühemaid ajavahemikke hinnata). Seejuures on pikosekundilised lahutused tänapäeval juba üsna tavalised. Siinsamas füüsikainstituudis kasutatakse **lasereid** (laseritest kuulete kursuse jooksul veel), mis genereerivad 1-2 ps kestusega valgusvälkeid. Neil päevil saab FI laseri, mille pulsi pikkus on kümneid kordi lühem.

Aga läheme oma põhiteemaga edasi. Selgub, et kui dt on uuritava protsessi seisukohalt **piisavalt lühike**, siis võib summa asendada **integraaliga** (see on lihtsalt matemaatiline sümbol - trikk tähistamaks lõpmatu suurest elementide arvust koosnevat summat, kusjuures liidetavad ise on lõpmata väikesed):

$$s = \sum_{\Delta t \to 0} v_i(t)dt = \int v(t)dt .$$



Pole eriti raske mõista integraali **geomeetrilist** tähendust. Selleks on **integraalialuse funktsiooni pindala**.

Niisiis, leidmaks läbitud tee pikkust, tuleb meil lihtsalt teepikkust kirjeldav diferentsiaalvõrrand,

$$ds = v(t)dt = s'(t)dt ,$$

integreerida:

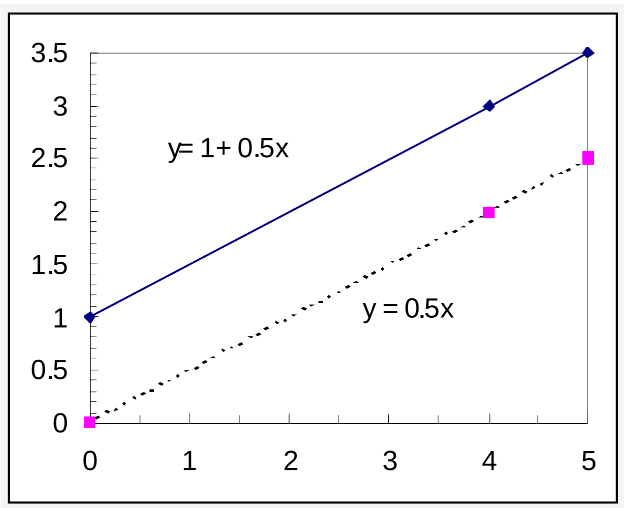
$$s = \int vdt = \int s'(t)dt .$$

Integreerimise tulemuseks (lahendiks) on siis argumendist (so ajast t) sõltuv funktsioon *s=s(t)*. Seega on integreerimine **tuletise kaudu funktsiooni otsimine**. **Otsitakse sellist funktsiooni, mille tuletis oleks integraalialuse avaldisega võrdne.**

Kui **kiirus ajas ei muutu** (on konstantne), võime teepikkuse avaldises liiruse *v* integraali ette tuua:

$$\int ds = v\int dt ,$$

millest järgneb, et



$$s = vt + s_0 ,$$

sest kõigi dt kokkuliitmine annab meile lihtsalt sõiduks kulunud aja.

Miks me aga sellele avaldisele veel mingi liikme $\boldsymbol{s_0}$ lisasime? Aga sellepärast, et võrrandit $ds = vdt$ rahuldab iga sirge, mille tõus on v (vt joonist). Seega jääb ülaltoodud integraali täpne väärtus kindlaks tegemata. Läbikäidud tee ei sõltu kohast, kust me liikumist alustasime, kas Rakverest või Riia tn otsast. Ühtlase kiirusega sõites läbime ikka ühesuguse vahemaa. Niisiis väljendab s_0 lihtsalt meie teadmatust liikumise alguspunkti suhtes.

Kui diferentsiaalvõrrand on kirjutatud üldisel kujul, siis tema lahendina ei otsita mitte arvu (mingi funktsiooni väärtust), vaid funktsiooni ennast matemaatilisel kujul. Diferentsiaalvõrrandi integreerimise tulemusena leitaksegi niisugune funktsioon e *määramata integraal*. Tegemist on siis nö **üldjuhul** kehtiva valemiga.

Praktilistes ülesannetes määratakse integreerimiskonstant mingist lisateabest, nn **alg- või ääretingimustest**. **Ääaretingimused eraldavad kõikvõimalikest protsessidest ühe konkreetse.** Näiteks ülatoodud näites võib nõuda, et ajahetkel t=0 oleks funktsiooni väärtus s_0=0. Integreerimiskonstant s_0 siis näitab, et liikumist alustati kohalt 0 ja *s* on siis lõpp-punkti tegelik asukoht.

Ääretingimuste arvestamine toimub *määratud integraali* arvutamise teel. Meie lihtsas näites siis järgmiselt:

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = s\Big|_{s_1}^{s_2} = s_2 - s_1 = v\int_{t_1}^{t_2} dt = vt\Big|_{t_1}^{t_2} = v(t_2 - t_1) = v\Delta t\,.$$

Seda arvutatakse nii, et leitakse määramatu integraali väärtus ***ülemisel rajal*** t_2 e **argumendi lõppväärtusel** ja lahutatakse sellest määramatu integraali väärtus ***alumisel rajal*** t_1 e **argumendi algväärtusel**. Siin ei jää enam midagi ebamääraseks. Ajahetkel t_1 asusime kohal s_1 ja hetkel t_2 kohal s_2.

Teeme läbi ka ühe keerulisema näite, nt kiirendusega liikumise juhu. Oletame, et keha alustab liikumist nullkiirusest ja liigub ühtlaselt kiirenevalt kiirendusega *a* m s^{-2} (kiirendus ise ajast ei sõltu!). Aja t möödudes on keha kiirus siis

$$v(t) = at.$$

Iga väga lühikese ajavahemiku *dt* jooksul läbitud teepikkus võrdub

$$ds = v(t)dt\,.$$

Nagu varemgi, läbitud tee leidmiseks, tuleb meil vaid need elementaarsed teejupid kokku liita. Aga olgem tähelepanelikud! Erinevalt eelmisest näitest seekord kiirus ajas pidevalt muutub. Seepärast ei tohi me enam teda integraalimärgi ette tuua, mis varem oli oluline lihtsustus. Küll aga saame, avaldades kiiruse kiirenduse ja aja kaudu, ette tuua kiirenduse, mis on ajast sõltumatu konstant. Saame

$$\int ds = \int v(t)dt = \int at\,dt = a\int t\,dt$$

ja peale integreerimist: $s = a\dfrac{t^2}{2} + s_0$. Astmefunktsioonide integreerimise reeglitest räägime allpool.

Arvutades määratud integraali toimime järgmiselt:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \qquad \text{ja} \qquad x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} atdt$$

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} atdt = \frac{a{t_2}^2}{2} - \frac{a{t_1}^2}{2} = \frac{a(t_2^2 - t_1^2)}{2}$$

Selle kursuse jooksul kasutame integreerimist lisaks ebaühtlase kiirusega liikumisel läbitava teepikkuse arvutamisele veel näiteks aatomituuma ümbritseva elektrivälja potentsiaalse energia ja gaasi paisumisel tehtava töö rehkendamisel.

Tihti tuleb füüsikas ette järgmine esimest järku diferentsiaalvõrrand, mis põhineb teadmisel, et suuruse *A* **muutumise *kiirus*** (nt ajas *t*, või ka ruumis, teepikkuse *x* läbimisel) on võrdeline suuruse *A* enesega.

Ülapool nägime, et selline käitumine on omane eksponetfunktsiooni tuletisele, seega otsitav funktsioon on eksponentfunktsioon. Sellise seaduspärasuse järgi toimub näiteks

- vedeliku väljavoolamine reservuaarist
- elektrimahtuvuse tühjenemine
- radioaktiivse aine lagunemine
- valguskvantide neelamine aines

Neil juhtudel võime kirjutada

$$\frac{dA}{dt} = -kA;$$

Proportsionaalsustegur k ehk kiiruskonstant ei sõltu siin ajast. Võrrandi integreerimiseks rakendame **muutujate eraldamise reeglit**, viies *A* ühele poole ja *t* teisele poole võrdusmärki:

$$\frac{dA}{A} = -kdt\ .$$

Integreerides

$$\int \frac{dA}{A} = -\int kdt$$

saame

$$\ln A = -kt + \ln A_0$$

$$\ln\frac{A}{A_0} = -kt \text{ ,}$$

millest järgneb, et

$$A = A_0 e^{-kt} \text{ .}$$

Nagu panite tähele, integreerimiskonstant kirjutati seekord mugavuse pärast logaritmi kujul, lnA_0, et muutuse alguspunkt viia sisse *suhtena*, mitte *vahena* lõpp-punkti suhtes.

Viimase valemi võib kirjutada ka kujul

$$A = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ .}$$

kus $\tau = 1/k$ on nn. eksponendi tegur (antud juhul ajategur). Aja *t* asemel võib olla teepikkus, näiteks kui valguskvandid (või radioaktiivne kiirgus) läbivad neelavat ainet. Konstant *k* näitab siis valguse nõrgenemist teepikkuse ühiku kohta.

Kui võrrand näitab, et suurus mitte ei kahane, vaid **kasvab** iseendaga võrdeliselt, siis saame samasuguse eksponentsiaalse lahendi, aga positiivse astendajaga. Positiivse eksponendiga kirjeldub näiteks

- populatsiooni (bakterite koloonia) kasv
- taime kasv
- majanduse (kapitali) kasv etc

Selline eksponentsiaalne kasv on muidugi võimalik vaid arengu algfaasis, siis kui süsteemi iga element suureneb (paljuneb) veel ilma teiste poolt mõjutamata. Hiljem protsess küllastub, nt kui koloonia muutub nii tihedaks, et naaber-rakud peavad toidu (valguse, jne) pärast üksteisega konkureerima hakkama.

Läheme veel sammukese edasi ja peatume põgusalt **teist järku** differentsiaalvõrranditel, mille järgi käituvad protsessid on samuti füüsikas (st looduses) küllalt laialt levinud.

Kui esimest järku diferentsiaalvõrrand sidus omavahel argumendi ja funktsiooni *muutused* (sisaldades esimest järku tuletisi), siis teist järku diferentsiaalvõrrand seob omavahel argumendi ja funktsiooni *muutuste muutumised* (teist järku tuletised).

$$f = f(x)$$

$$f' = \frac{df}{dx}$$

$$f'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Teist järku diferentsiaalvõrrandi laialt kasutatavaks näiteks on **võnkumiste võrrand**, mis põhineb teadmisel, et vedru (või pendlit) tagasitõmbav jõud on võrdeline hälbega *A* tasakaaluasendist.

$$F = m\frac{d^2A}{dt^2} = -kA$$

Kuna jõud põhjustab kiiruse muutumise ehk kiirenduse, siis väidab see võrrand, et võnkuva massi kiiruse muutumise kiirus (e kiirendus) on võrdeline hälbega tasakaaluseisust ja on suunatud tasakaaluasendi poole (viimasele viitab miinusmärk **elastsuskoefitsiendi** k ees):

Saab näidata, et selle võrrandi lahendiks on perioodiliselt võnkuv siinusfunktsioon, mille võnkeperiood T avaldub järgmiselt:

$$\frac{k}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2} = \omega^2 \text{ ehk } T = \sqrt{\frac{4\pi^2 m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 1/\nu$$

Pendli puhul k/m=g/l ja mass taandub valemist välja andes tulemuseks

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Näeme, et pendli võnkeperiood sõltub ainult pendli pikkusest ja raskuskiirendusest. Seega on pendli abil võimalik mõõta Maa (samuti mõne teise taevakeha) raskuskiirendust, mida on ka edukalt rakendatud.

Teist järku differentsiaalvõrrand on ka kvantmehaanika põhivõrrand e **Scrödingeri** võrrand, millega me edaspidi lähemat tutvust teeme.

Selleks, et määrata, missuguses siinusfunktsiooni punktis asub võnkuv keha teatud ajahetkel, on lisaks võrrandi lahendiks olevale siinusfunktsioonile tarvis teada veel juba **kahte algtingimust**: algkoordinaati, millest liikumine algab ja liikumise algsuunda, kas tasakaalupunkti poole või sellest eemale. **Minimaalselt vajalike ääretingimuste hulk võrdub diffrentsiaalvõrrandi järguga.**

2.4. Astmefunktsioonide integreerimise reeglid

Integraali on lihtne leida kui integreeritav on astmefunktsioon:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

Näiteks kui *v=at,* siis $\int at dt = \frac{at^2}{2}$.

Veel mõned näiteid:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2}$$

Aga peame meeles, et erandiks on integraal, mis annaks tulemuseks null-astme

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x .$$

Eksponentfunktsiooni integraal avaldub samuti väga lihtsalt

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

Nende valemite kontrolliks tuleb vaid paremat poolt differentseerida; tulemuseks peame saama integraalialuse avaldise.

2.5. Vektorid ja skalaarid

Skalaarid on suurused, mida iseloomustab teatud arvväärtus (ja füüsikas ka ühik). Skalaarid liituvad **algebraliselt**. **Algebraline summa**- omavahel liitumis- ja/või lahutamismärkidega ühendatud arvud või avaldised.

Vektorid on suurused, mida iseloomustab koordinaatide ruumis **siht, suund ja pikkus**. Füüsikas iseloomustab vektorit veel ka ühik.

Vektorid on nt

- kiirus
- kiirendus
- samuti kõik kiiruse ja kiirenduse kaudu avalduvad suurused nagu jõud=ma
- impulss=mv
- impulssmoment=pxr
- jõumoment=Fxr
- elektriväja tugevus.

Paneme aga tähele, et energia nagu ka mass või temperatuur on skalaarid (on täielikult määratud vastava arvväärtusega ning kasutatud ühikuga).

Vektorit tähistab kirjapildis tavaliselt kas noolega kaetud (nt $\vec{\mathbb{F}}$) või rasvane (*bold*) täht (**F**).

Vektorite omadusi:

- Vektor on suunaga lõik (nool) ruumis
- Vektorid on võrdsed, kui neil on sama siht, suund (+ või miinus antud sihis) ja pikkus
- Vektori koordinaadid on tema lõpp- ja algpunktide vahed

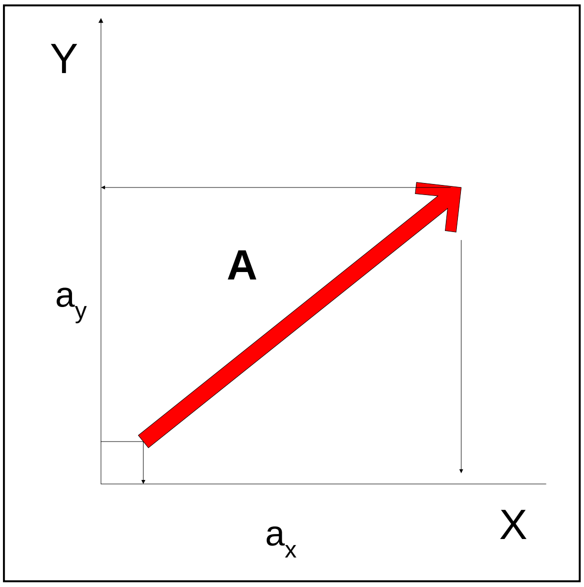
- Suvaline vektor on avaldatav/lahutatav **risitolevate** koordinaattelgede suunaliste komponentide kaudu. Komponentide summa annab siis kokku lahutatava vektori.

Samuti võib iga vektorit avaldada **ühikvektorite** (**i, j, k**) kui baasi kaudu. **Ühikvektor** on ühikulise pikkusega vektor. Öeldakse, et vektor **A** on jaotatud/jagatud kolmeks ristiolevaks (baas)vektoriks (**i, j, k**). Vastavaid jaotuskoefitsiente a_x jne nimetatakse siis **Decartese (Eukleidese) koordinaatideks** (baasi vastavalt **Decartese** või **Eukleidese** baasik). Ühikvektorite kasutamine lihtsustab matemaatikat, eriti kui ühikvektori alguspunkti saab ühitada koordinaatide alguspunktiga. Vektorite pikkus ja suund ei sõltu koordinaatsüsteemist. Seega võib iga ruumipunkti käsitleda kui alguspunkti. Kõik on vaid mugavuse küsimus.

Tasapinnal asuva vektori jaoks on vaja kahte baasvektorit, ruumis asuva jaoks kolme (üks iga koordinaadi x, y, z jaoks):

$$\vec{A} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Nende koordinaatide **geomeetriline mõte** on esitatud kõrvaloleval joonisel: $\begin{matrix} a_x = x_2 - x_1 \\ a_y = y_2 - y_1 \end{matrix}$.

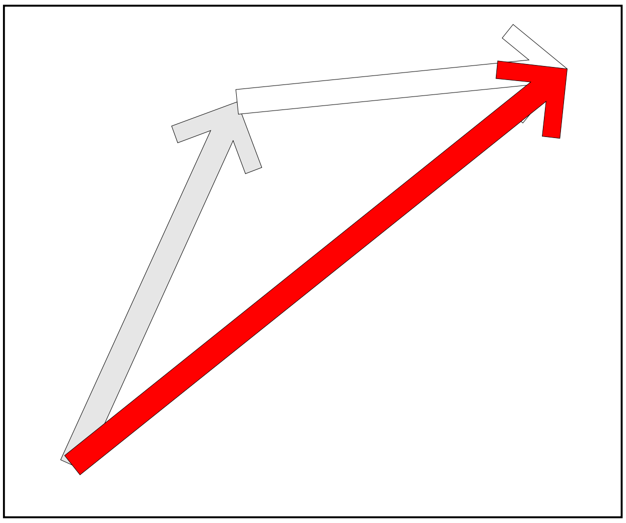
Neid vahesid nimetatakse ka vektori **A projektsiooniks** vastavatele telgedele $\begin{matrix} a_x = |\vec{A}|\cos\alpha \\ a_y = |\vec{A}|\sin\alpha \end{matrix}$.

Vektori pikkus (moodul) leitakse avaldisest

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Vektorid liituvad/lahutuvad geomeetriliselt nagu joonisel näidatud

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$$
$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{D}.$$



Samuti toimitakse suvalise arvu vektoritega liitmisel/lahutamisel.

Vektorite liitmine/lahutamine ei sõltu tegurite järjekorrast (**kommutatiivsus**).

Tehted vektori komponentidega on üksteisest sõltumatud, kui koordinaadid on valitud üksteisest **lineaarselt sõltumatutena** (kahe vektori lineaarne sõltuvus tähendab nende paralleelsust!).

$$\vec{A}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$
$$\vec{B}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k} .$$
$$\vec{C}=\left(a_x+b_x\right)\vec{i}+\left(a_y+b_y\right)\vec{j}+\left(a_z+b_z\right)\vec{k}$$

Vektorite korrutamine. Eristatatakse vektorite **skalaar- ja vektorkorrutist**.

Skalaarkorrutise (mis on kommutatiivne) tulemuseks on **skalaar** väärtusega

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\alpha=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Ristiolevate vektorite skalaarkorrutis =0

Vektorkorrutise tulemuseks on **vektor**, mis on korrutatavate vektoritega ristuvas tasapinnas.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(a_yb_z-b_ya_z\right)-\vec{j}\left(a_xb_z-b_xa_z\right)+\vec{k}\left(a_xb_y-b_xa_y\right)$$

Selle vektori suuna määramiseks kasutatakse **kruvireeglit** ja tema pikkus on määratud avaldisega

$$\vec{A}\times\vec{B}=AB\sin\alpha .$$

Samasuunaliste vektorite vektorkorrutis=0.

Vektorkorrutis ei ole kommutatiivne

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)$$

Mitme muutuja funktsiooni korral nimetatakse funktsiooni **kiireima kasvamise suunda ja kiirust** antud punktis iseloomustavat vektorit **gradiendiks**

$$grad f(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Tagurpidi delta nimi on *nabla*. Gradiendivektori komponentideks on funktsiooni **osatuletised**.

Lõpuks on võib-olla kasulik teada, et ka **kompleksarvud** on vektorid; tema komponente võib kirjeldada kahes ristiolevas (**reaalses** ja **imaginaarses**) tasandis asuva liikme abil.

Võtame kokku

Matemaatika olulisus seisneb selles, et ta võimaldab **kompaktselt** (üks ja sama valem kehtib mitme füüsikaliselt erineva nähtuse puhul) formuleerida ja **kvantitatiivselt** käsitleda kõige erinevamaid probleeme.

Funktsioonid kui arvudevahelised sõltuvused.

Funktsiooni diferentseerimine e sirglõikudega lähendamine ja vastavate tõusude (tuletiste) määramine.

Taylorí rida. Iga siledat funktsiooni saab argumendi väikestel kõrvalekalletel $\triangle$ arendada ritta (nn Taylori rida) tema tuletiste järgi. Tavaliselt võib piirduda esimese, kõige suurema liikmega, mis on nihkega proportsionaalne. **Nii defineeritakse funktsiooni tõus ehk esimene tuletis.**

$$y=f(x)$$

$$\triangle y=f(a+\triangle)-f(a)=\frac{\triangle}{1!}f'(a)+\frac{\triangle^2}{2!}f''(a)+\ldots$$

Siit näeme, et esimest järku tuletiste kaudu funktsiooni deferentseerimine on vaid mugav lähendus (kuid enamasti mõistlik kompromiss täpsuse ja töömahukuse vahel).

Intergreerimine kui tuletise kaudu funktsiooni otsimine.

Funktsionaalanalüüs e tuletiste kaudu funktsiooni ekstreemumide (miinimumi ja maksimumi) otsimine.

Skalaarid ja vektorid. Skalaare liidetakse/lahutatakse algebraliselt, vektoreid geomeetriliselt. Vektorid on väga kasulikud liikumise kirjeldamiseks mitmemõõtmelises ruumis. Ühes mõõtmes neid vaja ei läheks.